Építész Kar **Gyakorló feladatok**

1. gyakorlat

Számítsa ki az alábbi komplex számok összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát:

a/ $z_1 = 5 + 2i$ $z_2 = 4 - 3i$

b/ $z_1 = 2 - 3i$ $z_2 = -4 + 7i$

c/ $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 1 - i$

d/ $z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = 2 - i$

e/ $z_1 = 2 + i$ $z_2 = 3 + i$

Írja át a következő komplex számokat trigonometrikus alakba:

1+i, 2i, -1-i, -2, $1+\sqrt{3}\,i$

Végezze el a műveletet:

$(-1+i)^7 =$ $(1+i\sqrt{3})^{-10} =$ $\sqrt{2i} =$ $\sqrt[3]{-i} =$ $\sqrt[3]{-1} =$

$(-1+i\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} =$ $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} =$

2. gyakorlat

Sajátérték - sajátvektor

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{13}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{17}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

3.gyakorlat

Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

$$y^2-1=(2y+xy)y'$$
$$xy'+y=y^2$$
$$2(xy+x-y-1)=\left(x^2-2x\right)y'$$
$$\left(x+xy^2\right)y'=3$$
$$\sqrt{1-y^2}=\left(1-x^2\right)y'$$
$$yy'=\frac{e^x}{1+e^x} \qquad y(1)=1$$
$$y'=xy+x^3$$
$$y'\cos x+y\sin x=1$$
$$y'-\frac{2}{x}y=x^2e^x$$
$$y'+y\,thx=6e^{2x}$$

4. gyakorlat

Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

| | | |
|---|---|---|
| $y'' - 3y' + 2y = x + e^{-5x}$ | $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \cos 2x$ | $y'' - 2y' + 5y = x^2$ |
| $y'' - 4y' + 3y = xe^{-5x}$ | $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{sh}3x$ | $y'' - 2y' + 10y = xe^x$ |
| $y'' - 5y' + 4y = xe^x$ | $y'' - 6y' + 8y = x\sin 2x$ | $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}\sin x$ |
| $y'' - 6y' + 5y = e^x\sin x$ | $y'' - 6y' + 9y = 3x^2$ | $y'' - 8y' + 20y = e^{2x}\sin 4x$ |
| $y'' - 7y' + 6y = e^{-x} + x\cos 6x$ | $y'' - 7y' + 12y = \sin 3x + \mathrm{sh}3x$ | $y'' - 8y' + 25y = \mathrm{ch}4x$ |
| $y'' - 8y' + 7y = (x+7)\mathrm{sh}x$ | $y'' - 8y' = 2002 + e^x$ | $y'' + 9y = \cos 3x$ |

5. gyakorlat

Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait, valamint azok értelmezési tartományát!

1. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$
2. $f(x,y)=x^y$
3. $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x}$
4. $f(x,y)=y^2\ln\sqrt{xy}+arc\,\mathrm{tg}(xy)$
5. $f(x,y)=\frac{x^3e^y}{1+\sin x+y^2}$
6. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & ha\ x^2+y^2\neq 0\\ 0, & ha\ x^2+y^2=0\end{cases}$ ( origóban is ! )

Határozza meg az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait! Igazolja, hogy $f''_{xy} = f''_{yx}$

7. $f(x,y) = \ln(x + e^y)$

8. $f(x,y) = x^y$

9. $f(x,y) = \arccos\frac{y}{x}$

10. Határozza meg az $f(x,y) = (x-y)^2$ függvény $\alpha = \frac{\pi}{3}$ irányú iránymenti deriváltját a P(2,3) pontban!

11. Határozza meg mely irány esetén zérus az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény P(2,0) pontbeli iránymenti deriváltja!

12. Határozza meg mely irányok esetén maximális az előző feladatbeli iránymenti derivált!

13. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{25x^2 y}{x^2 + y^3}$ függvény x+3y=5 egyenes irányába eső iránymenti deriváltját a P(2,1) pontban !

14. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 e^y$ függvény P(2,0) pontbeli, a <u>v</u>(3,4) vektorra merőleges iránymenti deriváltját!

15. Határozza meg a $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény P(3,1) pontjában annak az iránymenti deriváltnak az értékét, amely a függvény által meghatározott felület P pontjához tartozó szintvonal érintőjének irányába esik.

Írja fel az alábbi függvények által meghatározott felület adott P pont fölötti érintősíkjának egyenletét!

16. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5$ P(1,2)

17. $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ P(1,2)

Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékeit!

18. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5$

19. $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$

20. Határozza meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak!

21. Határozza meg a $\sin x \sin y \sin z$ szorzat maximumát, ha *x, y* és *z* egy háromszög szögei!

22. Határozza meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét az x=0, y=0, x+y=6 egyenesekkel határolt zárt tartományban.

6. gyakorlat

Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat!

23. $\iint_T (x^2+4y)dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

24. $\iint_T e^{3x+4y}dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le \ln 2,\ 0\le y\le \ln 3\}$

25. $\iint_T e^{-x-y}dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$ $(a\ge 0)$

26. $\iint_T \sin(x+y)dT$ ahol $T=\left\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\right\}$

27. $\iint_T xye^{x^2+y^2}dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

28. $\iint_T \frac{x}{x^2+y^2}dT$ ahol $T=\{(x,y): 1\le x\le \sqrt{3},\ 0\le y\le 1\}$

29. $\iint_T \frac{2xy}{x^2+y^2}dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

30. $\iint_T (2xy)dT$ ahol $T$ az $y=x^2$ és $y=\sqrt{x}$ görbék által határolt zárt síkrész.

31. $\iint_T \frac{2y}{x+1}dT$ ahol $T$ az $y=\frac{1}{x}$ $x=1,$ *és* $x=2$ görbék által határolt zárt síkrész.

32. $\iint_T \frac{2xy}{x^2+y^2}dT$ ahol $T=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

33. $\iint_T (2y)dT$ ahol $T$ az $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{4}$, *és* $y=1$ görbék által határolt zárt síkrész.

34. $\iint_T y\sin x dT$ ahol $T=\{(x,y): 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$ háromszög.

35. $\iint_T \cos(x-y)dT$ ahol $T$ az A(0,0); B(1,1); C(3,1); D(4,0) csúcspontú trapéz.

37. $\iint_T (x^2+2y)dT$ ahol $T$ az A(1,1); B(0,3); C(3,0) csúcspontú háromszög.

38. $\iint_T \ln(x^2+y^2)dT$ ahol $T=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\}$

39. $\iint_T (x^2-y^2)dT$ ahol $T=\left\{(r,\phi): 0\le r\le 1,\ 0\le \phi\le \frac{\pi}{4}\right\}$ körcikk.

40. $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dT$ ahol $T=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 1\}$ kör.

41. Határozza meg az origó középpontú két egység sugarú gömbből az $(x-1)^2+y^2=1$ henger által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát!

42. Határozza meg az $f(x,y)=xy$ nyeregfelület $x^2+y^2\le 1$ egyenletű hengerbe eső részének a felszínét!

43. Határozza meg az $f(x,y)=1-x^2-y^2$ paraboloid x,y sík feletti részének a felszínét!

44. Határozza meg a $T = \{(x,y): x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}$ félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

45. Határozza meg a $T = \left\{(x,y): x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

(A fenti feladatok többsége megtalálható Fekete - Zalay : Többváltozós függvények analízise. Bólyai sorozat)

7. gyakorlat

Írja fel az alábbi térgörbék adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét.

46. $r(t) = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 2.$

47. $r(t) = \underline{i}\sin t + \underline{j}\cos t + \frac{1}{\cos t}\underline{k}, \quad t = 0.$

48. $r(t) = 2t\underline{i} + \frac{2}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 2.$

49. $r(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 1.$

Kiszámítandó a következő térgörbék adott szakaszának ívhossza!

50. $r(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}, \quad 0 \le t \le 1.$

51. $r(t) = e^{at}\cos t\underline{i} + e^{at}\sin t\underline{j} + be^{at}\underline{k}, \quad -\infty < t \le t_0.$

52. $r(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}, \quad -1 \le t \le 2.$

53. $r(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\underline{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\underline{j} + (t - \operatorname{th} t)\underline{k}, \quad 0 \le t \le 10.$

54. $r(t) = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2}t+3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}, \quad 0 \le t \le 1.$

Kiszámítandó a következő térgörbék adott pontjában a kísérő három él, a simulósík, normálsík és rektifikálósík egyenlete!

55. $r(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}, \quad t = 2.$

56. $r(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \quad t = -1.$

57. $r(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}, \quad t = 1.$

Számítsa ki az alábbi görbék adott pontbeli görbületét és torzióját!

58. $r(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}, \quad t = 2.$

59. $r(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \quad t = -1.$

60. $r(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}, \quad t = 1.$

8. gyakorlat

Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{r}(u)$ görbe és tengelyének iránya az $\underline{a}$ vektor.

61. $\underline{r}(u) = \underline{j}2\cos u + \underline{k}3\sin u, \quad \underline{a} = \underline{i}.$

62. $\underline{r}(u) = \underline{i}3\operatorname{ch} u + \underline{k}\operatorname{sh} u, \quad \underline{a} = \underline{j}.$

63. $\underline{r}(u) = (2\sin u + 3\operatorname{tg} u)\underline{i} + \underline{j}2\cos u, \quad \underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4\underline{k}.$

Írja fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{r}(u)$ görbe és csúcspontja az $\underline{a}$ helyvektor végpontja.

64. $\underline{r}(u) = \underline{i}\operatorname{sh} u + \underline{j}\operatorname{ch} u, \quad \underline{a} = 5\underline{k}.$

65. $\underline{r}(u) = \underline{i}u + \underline{j}u^4, \quad \underline{a} = 3\underline{j} + 7\underline{k}.$

Írja fel annak a forgásfelületnek az egyenletét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{r}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!

66. $\underline{r}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}, \quad \textit{forgástengely}: y$

67. $\underline{r}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 1)\underline{k}, \quad \textit{forgástengely}: z$

68. $\underline{r}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 5)\underline{k}, \quad \textit{forgástengely}: y$

Írja fel az alábbi felületek adott pontbeli érintősíkjának egyenletét!

69. $\underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2 v - u)\underline{k}, \quad u = 1,\ v = -2.$

70. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}u\sin v + v\underline{k}, \quad \textit{tetszőleges pontban}.$

71. $xy^2 + z^3 = 12, \quad P(1,2,2)$

Felszínszámítás:

72. $\underline{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u)\underline{i} + (\sin u + v\cos u)\underline{j} + (u+v)\underline{k}, \quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 1$

73. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}R\cos u\cos v + \underline{j}R\cos u\sin v + \underline{k}R\sin u$

74. $\underline{r}(u,v) = (a + b\cos u)\cos v\underline{i} + (a + b\cos u)\sin v\underline{j} + \underline{k}b\sin u,$

75. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}4\operatorname{ch} u\cos v + \underline{j}4u + \underline{k}4\operatorname{ch} u\sin v \quad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi.$

Felületi pontok osztályozása

76. $\underline{r}(u,v) = (a + b\cos u)\cos v\underline{i} + (a + b\cos u)\sin v\underline{j} + \underline{k}b\sin u,$

77. $\underline{r}(u,v) = (v + 2\cos u)\underline{i} + (v + 2\sin u)\underline{j} + \underline{k}v,$

78. $3z + 3xz - yz + x + y = 0, \quad \textit{az origóban}$

79. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

80. $z = x^2 - y^2$