Sajátérték probléma

Legyen $\underline{\underline{A}}$ egy kvadratikus mátrix. Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenlet $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldását az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátvektorának, a λ skalárt az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékének nevezzük.
Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenlet átrendezhető $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)\underline{x} = \underline{0}$ alakba. Az egyenletnek akkor és csak akkor van $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása, ha $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0$. Tehát a sajátértékek a $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A sajátértékek ismeretében az $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)\underline{x} = \underline{0}$ egyenletből a sajátvektorok meghatározhatók.

Valós, szimmetrikus mátrixok tulajdonságai:

Egy kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix valós szimmetrikus, ha $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^*$, ahol $\underline{\underline{A}}^*$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponált konjugáltját jelenti.

Tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$ egy valós szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós.

Bizonyítás: Vegyük az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenlet mindkét oldalának transzponált konjugáltját: $\underline{x}^* \underline{\underline{A}}^* = \overline{\lambda} \underline{x}^*$. A feltétel miatt ebből $\underline{x}^* \underline{\underline{A}} = \overline{\lambda} \underline{x}^*$ egyenlet adódik. Szorozzuk meg jobbról az $\underline{x}$ vektorral:

(i) $\underline{x}^* \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \overline{\lambda} \underline{x}^* \underline{x}$.

Másrészt az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenletet balról szorozva az $\underline{x}^*$ vektorral kapjuk, hogy

(ii) $\underline{x}^* \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}^* \underline{x}$.

Az (i) és (ii) egyenleteket kivonva egymásból : $\left(\overline{\lambda} - \lambda\right)\underline{x}^* \underline{x} = 0$.

Mivel $\underline{x} \neq \underline{0}$, ezért $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz a sajátérték valós szám.

Tétel: Egy $\underline{\underline{A}}$ valós szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyítás: Legyen λ_1 és λ_2 két különböző sajátérték, azaz $\lambda_1 \neq \lambda_2$. A megfelelő sajátvektorok $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$.

Tehát $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$ és $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \lambda_2 \underline{x}_2$. Az első egyenlet transzponált konjugáltját szorozzuk meg jobbról az $\underline{x}_2$ vektorral és használjuk fel, hogy $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^*$. Ekkor adódik, hogy $\underline{x}_1^* \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \lambda_1 \underline{x}_1^* \underline{x}_2$. A második egyenletet balról szorozva $\underline{x}_1^*$ vektorral, kapjuk, hogy $\underline{x}_1^* \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \lambda_2 \underline{x}_1^* \underline{x}_2$. A két egyenlet kivonásával adódik, hogy $\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\underline{x}_1^* \underline{x}_2 = 0$. Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $\underline{x}_1^* \underline{x}_2 = 0$, tehát $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ ortogonálisak.

Megjegyzés (1): (bizonyítás nélkül) Ha λ a karakterisztikus egyenlet többszörös, mondjuk *k*-szoros gyöke, akkor a hozzátartozó sajátvektorok egy *k* dimenziós alteret alkotnak, amelyből kiválasztható *k* darab páronként ortogonális sajátvektor.

Megjegyzés (2): Az előző tételből és a hozzá fűzött megjegyzésből következik, hogy minden $n \times n$ típusú valós szimmetrikus mátrixnak van *n* darab páronként ortogonális vektorokból álló sajátvektor rendszere.

Legyen az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ típusú valós szimmetrikus mátrix páronként ortogonális egységvektorokból álló sajátvektor rendszere: $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$. Tehát $\underline{u}_i^* \underline{u}_j = \begin{cases} 0, \; ha \; i \neq j \\ 1 \; ha \; i = j \end{cases}$

Jelölje $\underline{\underline{U}}$ az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ vektorokból alkotott mátrixot: $\underline{\underline{U}} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n]$

Tétel: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{\Lambda}}$, ahol $\underline{\underline{\Lambda}}$ a megfelelő sajátértékekből alkotott diagonálmátrix.

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Következmény: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\underline{U}}^{-1}$

és $\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^T$ vagyis az $\underline{\underline{U}}$ mátrix inverze egyenlő a transzponáltjával.