Képletgyűjtemény MSc matematika vizsgára

Építőkari Matematika MSc

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

deriváltak:

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln(a)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{ar\,sinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{ar\,cosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{ar\,tanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\operatorname{ar\,coth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

differenciálási szabályok:

$(cu)' = cu'$ (c konstans)

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$

integrálási szabályok:

$\int cf \, dx = c \int f \, dx$ (c konstans)

$\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$

$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$, ahol F az f primitív függvénye

$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) + c$, ahol F az f primitív függvénye

$\int f^\alpha f' \, dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ha $\alpha \neq -1$

$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln|f| + c$

$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$

nevezetes helyettesítések:

$R(e^x)$	$e^x = t$
$R(\sqrt{ax+b})$	$\sqrt{ax+b} = t$
$R\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}\right)$	$\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} = t$
$R(\sin x, \cos x)$	$\sin x, \cos x, \tan x, \tan \frac{x}{2} = t$
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t,\ x = a \cos t$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \sinh t$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = a \cosh t$

integrálok:

$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \neq -1)$

$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{ar\,sinh} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{ar\,cosh} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar\,tanh} \frac{x}{a} + c$, ha $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar\,coth} \frac{x}{a} + c$, ha $\left|\frac{x}{a}\right| > 1$

$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$

1. Parciális differenciálegyenletek

1. Az $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$,

   ahol $b_n = \frac{2}{L} \cdot \int\limits_{t=0}^{L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot t\right) dt$.

2. $\int x \sin(a \cdot x) dx = \frac{\sin(a \cdot x) - ax \cos(a \cdot x)}{a^2} + C$ továbbá: $\int x^2 \sin(a \cdot x) dx = -\frac{a^2 x^2 \cos(a \cdot x) - 2\cos(a \cdot x) - 2ax \sin(a \cdot x)}{a^3}$.

3. Rezgő húr: $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (0 < x < L, 0 < t) \\ u(t, 0) = u(L, t) \equiv 0 & 0 < t \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$

   megoldása $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \left[A_k \cdot \cos\left(\frac{kc\pi}{L} t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{kc\pi}{L} t\right)\right]$, ahol $\{A_k\}$ az $f(x)$ tiszta szinuszos Fourier együtthatói, $\alpha_k B_k$ pedig a $g(x)$ tiszta szinuszos Fourier együtthatói, ahol $\alpha_k = \frac{k\pi c}{L}$.

4. Hővezetés véges hosszú rúdban: $\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (0 < x < L, 0 < t) \\ u(t, 0) = u(L, t) \equiv 0 & 0 < t \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$

   Megoldás: $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$, ahol A_n az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier sorának együtthatói.

5. Néhány függvény tiszta szinuszos Fourier sora a $[0, \pi]$ intervallumon:

   (a) $0 \le x < \pi$, $f(x) = x$ függvényre: $f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right)$, ha $0 \le x < \pi$.

   (b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$ $g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.

   (c) $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi. \end{cases}$ függvényre: $h(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.

   (d) $0 \le x \le \pi$, $\varphi(x) = x \cdot (\pi - x)$ függvényre: $\varphi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.

2. Linaáris algebra

1. Gram Schmidt metódus: Legyen $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ a bázisa a $W \subset \mathbb{R}^d$ lineáris altérnek. Ekkor az alább megkonstruált $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ egy ortonormált bázisa W-nek:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}, \text{ és } 2 \le \ell \le k \text{ -ra: } \mathbf{v}_\ell := \frac{\mathbf{w}_\ell - \sum\limits_{i=1}^{\ell-1} (\mathbf{w}_\ell \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i}{\left|\mathbf{w}_\ell - \sum\limits_{i=1}^{\ell-1} (\mathbf{w}_\ell \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i\right|}.$$

3. Vektoranalízis

1. Ha az $\mathcal{A}$ irányított felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(u, v)$, ahol $(u, v) \in T$ a paraméter tartomány, akkor

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} \mathbf{F} d\mathbf{A} = \pm \iint\limits_{T} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv,$$

   ha az $\mathcal{A}$ irányítása az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$- vel azonos irányú akkor $+$ előjel van fent, egyébként $-$ előjel.

2. **Gauss divergencia tétel**: A $K \subset \mathbb{R}^3$ testnek az ∂K felületét irányítjuk a kifelé mutató normálissal. Adott a K minden pontjában értelmezett és kétszer differenciálható $\mathbf{F}$ vektormező. Ekkor:

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} d\mathbf{A} = \iiint_{K} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz.$$

3. **Stokes tétel** Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ felület és annak $\partial\mathcal{F}$ határa koherensen irányított. Adott az $\mathcal{F}$ minden pontjában értelmezett és kétszer differenciálható $\mathbf{F}$ vektormező. Ekkor

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A}$$

Green-tétel Legyen D egy olyan tartomány a síkon, melynek határa a C egyszerű zárt görbe. (D nem tartalmaz lyukakat!) Továbbá az $\vec{F}$ síkbeli vektortér, minden parciális deriváltja a D minden pontjában értelmezett. Nevezzük az F komponens függvényeit P-nek és Q-nak, vagyis

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Ekkor,

$$\int_{C} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_{D} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$$

4. Hengerkoordinátás helyettesítés (térbeli megfelelője a polár koordinátáknak)

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = rsin(\varphi) \\ z = z \end{array}\right\}$$

Vagyis ha

$$(x,y,z) = G(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

A hengerkoordinátás helyettesítés Jacobi determinánsának abszolút értéke:

$$|\det(G'(r,\varphi,z))| = \left|\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = r.$$

5. Gömbkoordinátás helyettesítés:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin u\cos v \\ y = r\sin u\sin v \\ z = r\cos u \end{array}\right\} \tag{1}$$

Vagyis a fenti jelölésekkel:

$$(x,y,z) = G(r,u,v) = (r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u). \tag{2}$$

A Jacobi determináns abszolút értéke:

$$|\det(G'(r,u,v))| = r^2\sin u.$$