Mérnök-fizikus matematika szigorlat

Írásbeli:	2006.06.26. (hétfő),	8–10h,	R.504.
Szóbeli:	2006.06.26. (hétfő),	12h-tól,	H.46.

1. (10 pont) Határozza meg a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet általános megoldását az $\mathbf{r} = [x, y, z] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ függvényre nézve!

2. (10 pont) Az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt definiáljuk a következőképpen:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Számolja ki az $\mathbf{u}$ vektormező rotációját valamint divergenciáját!

(b) Határozza meg $\mathbf{u}$ felületi integrálját az egységnyi sugarú gömb felszínére!

(c) Az $x^2 + y^2$ körvonal mentén számolja ki az $\mathbf{u}$ vonalintegrálját!

3. (10 pont) Határozza meg a következő komplex vonalintegrál értékét:

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{\sin z}{z^2(z^2+9)} dz = ?$$

(Az integrált egyetlen pozitív irányú körüljárásra kell venni.)

4. (10 pont) Móricka úgy próbálja elvégezni az egyetemet, hogy minden vizsgára nagyon okos barátját, Pistikét küldi be. Persze ennek a módszernek megvannak a veszélyei; ha egy vizsgán a csalás kiderül, akkor Mórickát örökre eltiltják az egyetemtől.

(a) Tegyük föl, hogy minden vizsgán 5% a lebukás esélye, a többi vizsgától függetlenül, és az egyetem elvégzéséhez 50 vizsgát kell letenni. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Móricka diplomát kap?

(b) Tegyük föl, hogy Móricka addig jár egyetemre, amíg egyszer le nem bukik. (Ha esetleg befejez egy egyetemet, elkezd egy újat.) Várhatóan hányadik vizsgáján fog lebukni?

5. (10 pont) Jelölje $\mathbb{T} = \{e^{i\phi} | \phi \in \mathbb{R}\}$ az egységnyi komplex számok halmazát, legyen λ az ívhossz által meghatározott mérték $\mathbb{T}$-n (tehát pl. $\lambda(\mathbb{T}) = 2\pi$), és tekintsük a $\mathbb{T}$-n λ szerint négyzetesen integrálható függvények terén a következő operátort:

$$U : L^2(\mathbb{T}, \lambda) \to L^2(\mathbb{T}, \lambda), \qquad f \mapsto Uf,$$

ahol

$$(Uf)(x) = f(e^{i\frac{\pi}{3}}x).$$

(a) Igazolja, hogy U unitér!

(b) Adja meg U pontspektrumát!

Összesen 50 pont

Értékelés:		
	0–19 pont:	elégtelen,
	20–27 pont:	elégséges,
	28–34 pont:	közepes,
	35–42 pont:	jó,
	43–50 pont:	jeles.

A szigorlat értékelésébe az írásbeli ill. a szóbeli fele-fele arányban számít. Csak az mehet szóbelizni, aki az írásbelin elérte az elégséges szintet. Az eredmények délután megtekinthetők az interneten:

`http://math.bme.hu/~tasnadi/mfszig_2005/mfszig.html`

Ugyancsak a fenti címen olvasható majd a szóbeli időbeosztása, valamint a szóbeli helye.

Jó munkát!