Mérnök-fizikus matematika szigorlat

Írásbeli:	2006 február 1.,	8–10h,	K.1.21. terem.
Szóbeli:	2006 február 2.,	8–12h,	E.I.C terem.

1. **(13 pont)** Határozza meg a következő egyenletrendszer $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right](t)$ általános megoldását:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) - 16y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t). \end{aligned}$$

2. **(13 pont)** Határozza meg a következő komplex vonalintegrál értékét:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\cos z}{z^2+4} dz = ?$$

(Az integrált egyetlen pozitív irányú körüljárásra kell venni.)

3. **(10 pont)** Egy gépnek n különböző alkatrésze van; az egyes alkatrészek élettartamai független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, a k. alkatrész élettartamának eloszlásfüggvénye $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}$, ha $t \geq 0$, és $F_k(t) \equiv 0$, ha $t < 0$. Mi a valószínűsége annak, hogy a megindulástól számított T időn belül valamelyik alkatrész elromlása következtében leáll a gép?

4. **(14 pont)** A $[0, 2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terén vezessük be a $\varphi \in \mathbb{R}$ szögű forgatást leíró T^φ operátor-sereget, illetve $k \in \mathbb{Z}$ esetén az $x \mapsto e^{ikx}$ exponenciális függvénnyel való szorzást leíró M_k operátor-sereget a következőképpen:

$$\begin{aligned} \big(T^\varphi f\big)(x) &:= f\big((x-\varphi) \mod 2\pi\big); \quad && \varphi \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2[0,2\pi], \quad x \in [0,2\pi]; \\ \big(M_k f\big)(x) &:= e^{ikx} f(x); && k \in \mathbb{Z}, \quad f \in L^2[0,2\pi], \quad x \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

   (a) *(4 pont)* Határozza meg a T^φ operátor inverzét, adjungáltját, normáját! Milyen operátorról van szó?

   (b) *(4 pont)* Határozza meg az M_k operátor inverzét, adjungáltját, normáját! Milyen operátorról van szó?

   (c) *(6 pont)* Mi a kapcsolat a $T^\varphi M_k$ és az $M_k T^\varphi$ operátorok között?

Összesen 50 pont

Értékelés:	0–19 pont:	elégtelen,
	20–27 pont:	elégséges,
	28–34 pont:	közepes,
	35–42 pont:	jó,
	43–50 pont:	jeles.

A szigorlat értékelésébe az írásbeli ill. a szóbeli fele-fele arányban számít. Csak az mehet szóbelizni, aki az írásbelin elérte az elégséges szintet. Az eredmények délután megtekinthetők az interneten:

`http://math.bme.hu/~tasnadi/mfszig_2005/mfszig.html`

Jó munkát!