Mérnök-fizikus matematika szigorlat
2005 november 2. 10:15–11:45

1. Az $u = \operatorname{ch} y$ helyettesítéssel határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános $y(x)$ megoldását:

$$xy'(x) \operatorname{sh} y(x) - \operatorname{ch} y(x) = x^2 \operatorname{sh} x.$$

12 pont

2. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális felbontását, és adjuk meg $\sin \mathbf{A}$ értékét!

   (b) Határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mátrix pozitív egész kitevős hatványait, és adjuk meg az $\exp(t\mathbf{B})$ $(t \in \mathbb{R})$ mátrixot!

14 pont

3. Egy pók által lerakott peték száma λ paraméterű (várhatóértékű) Poisson eloszlást mutat $(\lambda > 0)$. Az egyes peték egymástól függetlenül p valószínűséggel fejlődnek ki (ill. $1 - p$ valószínűséggel halnak el). Bizonyítsuk be, hogy a pók kifejlődött gyermekeinek száma $p\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású! 14 pont

4. Az $l^2(\mathbb{N})$ téren (négyzetesen összegezhető sorozatok Hilbert tere) definiáljuk a δ_n kanonikus bázis segítségével az A operátort a következő módon:

$$A\delta_n = 2\delta_n + 3i\delta_{n+1}. \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   Határozzuk meg az $A^*\delta_8$ vektort! 10 pont

Összesen 50 pont

Értékelés:	0–19 pont:	elégtelen,
	20–27 pont:	elégséges,
	28–34 pont:	közepes,
	35–42 pont:	jó,
	43–50 pont:	jeles.

A szigorlat értékelésébe az írásbeli ill. a szóbeli fele-fele arányban számít. Csak az mehet szóbelizni, aki az írásbelin elérte az elégséges szintet. Az eredmények délután megtekinthetők az interneten:

`http://math.bme.hu/~tasnadi/mfszig_2005/mfszig.html`

Jó munkát!