

Matematika szigorlat
2005. II. 3.

1. Legyen X normális, $N(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó. (13 p.)

(a) Határozzuk meg az $Y := X^2$ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét az $m = 0$ esetben! Számoljuk ki ebben az esetben az Y valószínűségi változó várható értékét!

(b) Határozzuk meg a $Z := \exp(X)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ esetén!

2. Adjuk meg az (12 p.)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z + 1 + i)^2(z^2 + 1)} dz$$

integrál értékét, ha Γ egy pozitív irányítású 2 egység sugarú kör, melynek középpontja az

(a) origó;

(b) illetve, a $(-2i)$ pont!

3. Tekintsük a (13 p.)

$$v(x, y, z) = (x + 3x^2z + z \sin y)\underline{i} + (x \sin z - 4xyz + y)\underline{j} + (ye^x - xz^2 + z)\underline{k}$$

vektormezőt, és az alábbi térrészt

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 3, y^2 + z^2 \leq x^2\} .$$

Számoljuk ki a

$$\oint_{\partial V} v(\underline{x}) dF$$

integrál értékét, ahol ∂V jelöli a V térrész kifelé irányított felszínét!

4. Legyen $H := \mathbb{C}^2$ Hilbert-tér a szokásos skalárszorzással, és legyen (12 p.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lineáris operátor.

(a) Igazoljuk, hogy A normális operátor!

(b) Számoljuk ki A pont-, folytonos- és reziduális spektrumát!

(c) Adjuk meg A spektrálfelbontását!

(d) Legyen t valós paraméter, és számoljuk ki az $\exp(tA)$ operátort!