

Fizikus matematika szigorlat **Írásbeli, 2013. március 12.**
Pontozás: 12+12+13+13=50 **Jó munkát!**

1. (a) $a = 2$ esetén rajzoljuk fel a következő DE-rendszer fázisképét! Adjuk meg a $(0, 1)$ egyensúlyi pont típusát, és azt, hogy stabil, instabil, aszimptotikusan stabil-e. Határozzuk meg a DE-rendszer általános megoldását és az $x(0) = 0$, $y(0) = 5$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldást.

(b) Adjuk meg, hogy milyen a esetén lesz aszimptotikusan stabil, illetve milyen a -ra nyeregpont a $(0, 1)$ egyensúlyi pont.

$$\dot{x} = x + ay - a$$

$$\dot{y} = ax + y - 1.$$

2. Határozza meg az $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ körhenger által az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ gömbből kimetszett test térfogatát! (Ötlet: használja a szokásos polárkoordinátákat.)

3. (a) Határozzuk meg az $f(x) = x(1-x)$; $0 \leq x \leq 1$ függvény tisztán szinuszos Fourier sorát. (Útmutatás: a szereplő szinuszok periódusa $T = 2$ többszöröse.) (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} = ?$

4. Legyen ξ egy $\lambda = 1$ paraméterű, Poisson eloszlású valószínűségi változó, η pedig legyen egyenletes eloszlású a $[-1, \xi]$ intervallumon. (a) $E(\eta) = ?$ (b) $P(\xi = 0 | \eta < 0) = ?$