

Fizikus matematika szigorlat **Írásbeli, 2012. január 18.**
Pontozás: 12+13+13+12=50p, Munkaidő:90 perc **Jó munkát!**

1. Tekintsük az $\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormezőt, ahol $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, és $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok. Határozzuk meg \mathbf{v} felületi integrálját az $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ felületre, valamint vonalintegrálját az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 2$ görbére.
2. Tekintsük az $\dot{x} = y; \dot{y} = -2x + ay$ differenciálegyenlet-rendszert, ahol a valós paraméter. (a) Írjuk fel az általános megoldást az $a = -2$, valamint az $a = 3$ esetben, adjuk meg az egyensúlyi pont típusát, és vázoljuk a fázisképet. (b) Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter minden értéke mellett keressük meg az izolált egyensúlyi pontokat, és vizsgáljuk azokat Ljapunov-stabilitás és asszimptotikus stabilitás szempontjából. (c) Az a paraméter mely értékére kapunk csomót? És fókuszot?
3. (a) Határozzuk meg a $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^2+4)^2} dx$ integrál értékét! (Útmutatás: $\cos^2 x$ -et linearizáljuk és használjuk a $\operatorname{Re} e^{iw} = \cos w$, $\operatorname{Im} e^{iw} = \sin w, w \in \mathbb{R}$ összefüggést. Miért van erre szükség?) A megoldás minden lépését indokoljuk!
(b) Korlátos-e a $\cos^2 z$ függvény az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkon? Állításunkat indokoljuk!
4. A tojásokat 12 darabos dobozokban árulják. A dobozok felében nincs törött tojás, harmadában egy törött tojás van, hatodában két törött tojás van. Veszünk egy doboz tojást, hazamegyünk és nekiállunk egy 3 tojásos rántotta elkészítéséhez.
(a) Mi a valószínűsége, hogy a dobozból véletlenszerűen kiválasztva a szükséges mennyiséget, pontosan egy törött tojás is a kezünkbe kerül?
(b) Látván, hogy a három tojásból az egyik törött, mi a valószínűsége, hogy a dobozban ott lapul még egy törött?

Fizikus matematika szigorlat **Írásbeli, 2012. január 18.**
Pontozás: 12+13+13+12=50p, Munkaidő:90 perc **Jó munkát!**

1. Tekintsük az $\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormezőt, ahol $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, és $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok. Határozzuk meg \mathbf{v} felületi integrálját az $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ felületre, valamint vonalintegrálját az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 2$ görbére.
2. Tekintsük az $\dot{x} = y; \dot{y} = -2x + ay$ differenciálegyenlet-rendszert, ahol a valós paraméter. (a) Írjuk fel az általános megoldást az $a = -2$, valamint az $a = 3$ esetben, adjuk meg az egyensúlyi pont típusát, és vázoljuk a fázisképet. (b) Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter minden értéke mellett keressük meg az izolált egyensúlyi pontokat, és vizsgáljuk azokat Ljapunov-stabilitás és asszimptotikus stabilitás szempontjából. (c) Az a paraméter mely értékére kapunk csomót? És fókuszot?
3. (a) Határozzuk meg a $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^2+4)^2} dx$ integrál értékét! (Útmutatás: $\cos^2 x$ -et linearizáljuk és használjuk a $\operatorname{Re} e^{iw} = \cos w$, $\operatorname{Im} e^{iw} = \sin w, w \in \mathbb{R}$ összefüggést. Miért van erre szükség?) A megoldás minden lépését indokoljuk!
(b) Korlátos-e a $\cos^2 z$ függvény az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkon? Állításunkat indokoljuk!
4. A tojásokat 12 darabos dobozokban árulják. A dobozok felében nincs törött tojás, harmadában egy törött tojás van, hatodában két törött tojás van. Veszünk egy doboz tojást, hazamegyünk és nekiállunk egy 3 tojásos rántotta elkészítéséhez.
(a) Mi a valószínűsége, hogy a dobozból véletlenszerűen kiválasztva a szükséges mennyiséget, pontosan egy törött tojás is a kezünkbe kerül?
(b) Látván, hogy a három tojásból az egyik törött, mi a valószínűsége, hogy a dobozban ott lapul még egy törött?

Fizikus matematika szigorlat **Írásbeli, 2012. január 18.**
Pontozás: 12+13+13+12=50p, Munkaidő:90 perc **Jó munkát!**

1. Tekintsük az $\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormezőt, ahol $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, és $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok. Határozzuk meg \mathbf{v} felületi integrálját az $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ felületre, valamint vonalintegrálját az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 2$ görbére.
2. Tekintsük az $\dot{x} = y; \dot{y} = -2x + ay$ differenciálegyenlet-rendszert, ahol a valós paraméter. (a) Írjuk fel az általános megoldást az $a = -2$, valamint az $a = 3$ esetben, adjuk meg az egyensúlyi pont típusát, és vázoljuk a fázisképet. (b) Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter minden értéke mellett keressük meg az izolált egyensúlyi pontokat, és vizsgáljuk azokat Ljapunov-stabilitás és asszimptotikus stabilitás szempontjából. (c) Az a paraméter mely értékére kapunk csomót? És fókuszot?
3. (a) Határozzuk meg a $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^2+4)^2} dx$ integrál értékét! (Útmutatás: $\cos^2 x$ -et linearizáljuk és használjuk a $\operatorname{Re} e^{iw} = \cos w$, $\operatorname{Im} e^{iw} = \sin w, w \in \mathbb{R}$ összefüggést. Miért van erre szükség?) A megoldás minden lépését indokoljuk!
(b) Korlátos-e a $\cos^2 z$ függvény az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkon? Állításunkat indokoljuk!
4. A tojásokat 12 darabos dobozokban árulják. A dobozok felében nincs törött tojás, harmadában egy törött tojás van, hatodában két törött tojás van. Veszünk egy doboz tojást, hazamegyünk és nekiállunk egy 3 tojásos rántotta elkészítéséhez.
(a) Mi a valószínűsége, hogy a dobozból véletlenszerűen kiválasztva a szükséges mennyiséget, pontosan egy törött tojás is a kezünkbe kerül?
(b) Látván, hogy a három tojásból az egyik törött, mi a valószínűsége, hogy a dobozban ott lapul még egy törött?