Fizikus matematika szigorlat Írásbeli, 2011. május 27.
Pontozás: 10+13+14+13=50 pont Jó munkát!

1. Keressük meg $\mathbb{R}^3$-nak azt az ortonormált bázisát, amelyben az A mátrix diagonális, ha a standard bázisban:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 11 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Mutassuk meg, hogy ha az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kellően sima függvény körszimmetrikus – azaz $u(r)$ csak az origótól való távolságtól, $r = \sqrt{x^2+y^2}$-től függ – akkor $\Delta u = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)$. (b) Határozzuk meg $u(r)$-t abban a konkrét esetben, amikor az $r < 1$ körlapon $\Delta u = -1$ teljesül, a körlapon kívül ($r \geq 1$ esetén) pedig $u \equiv 0$. (Megjegyzés: a megoldás egyértelmű, ha kihasználjuk, hogy $u(r)$ folytonos és korlátos függvény).

3. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+2t+5}$ függvény Fourier transzformáltját (azaz az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(t)\,dt$ integrál értékét minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén).

4. A céllövöldében, ha eltaláljuk a célpont körüli 1 cm sugarú kör alakú piros mezőt, kapunk egy pontot, egyébként nem. A lövedék becsapódásának célponthoz képesti koordinátái, X illetve Y független, normális eloszlású valószínűségi változók, 0 várható értékkel és $\sqrt{\log_4(e)}$ cm szórással. Ha 400 lövésből elérünk legalább k pontot, akkor nyerünk egy üveg pezsgőt: becsüljük meg, legalább mekkorának kell k-t választani, hogy ennek az esélye kevesebb legyen, mint 5% (az egyes lövések függetlennek tekinthetők).

Fizikus matematika szigorlat Írásbeli, 2011. május 27.
Pontozás: 10+13+14+13=50 pont Jó munkát!

1. Keressük meg $\mathbb{R}^3$-nak azt az ortonormált bázisát, amelyben az A mátrix diagonális, ha a standard bázisban:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 11 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Mutassuk meg, hogy ha az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kellően sima függvény körszimmetrikus – azaz $u(r)$ csak az origótól való távolságtól, $r = \sqrt{x^2+y^2}$-től függ – akkor $\Delta u = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)$. (b) Határozzuk meg $u(r)$-t abban a konkrét esetben, amikor az $r < 1$ körlapon $\Delta u = -1$ teljesül, a körlapon kívül ($r \geq 1$ esetén) pedig $u \equiv 0$. (Megjegyzés: a megoldás egyértelmű, ha kihasználjuk, hogy $u(r)$ folytonos és korlátos függvény).

3. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+2t+5}$ függvény Fourier transzformáltját (azaz az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(t)\,dt$ integrál értékét minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén).

4. A céllövöldében, ha eltaláljuk a célpont körüli 1 cm sugarú kör alakú piros mezőt, kapunk egy pontot, egyébként nem. A lövedék becsapódásának célponthoz képesti koordinátái, X illetve Y független, normális eloszlású valószínűségi változók, 0 várható értékkel és $\sqrt{\log_4(e)}$ cm szórással. Ha 400 lövésből elérünk legalább k pontot, akkor nyerünk egy üveg pezsgőt: becsüljük meg, legalább mekkorának kell k-t választani, hogy ennek az esélye kevesebb legyen, mint 5% (az egyes lövések függetlennek tekinthetők).

Fizikus matematika szigorlat Írásbeli, 2011. május 27.
Pontozás: 10+13+14+13=50 pont Jó munkát!

1. Keressük meg $\mathbb{R}^3$-nak azt az ortonormált bázisát, amelyben az A mátrix diagonális, ha a standard bázisban:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 11 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Mutassuk meg, hogy ha az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kellően sima függvény körszimmetrikus – azaz $u(r)$ csak az origótól való távolságtól, $r = \sqrt{x^2+y^2}$-től függ – akkor $\Delta u = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)$. (b) Határozzuk meg $u(r)$-t abban a konkrét esetben, amikor az $r < 1$ körlapon $\Delta u = -1$ teljesül, a körlapon kívül ($r \geq 1$ esetén) pedig $u \equiv 0$. (Megjegyzés: a megoldás egyértelmű, ha kihasználjuk, hogy $u(r)$ folytonos és korlátos függvény).

3. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+2t+5}$ függvény Fourier transzformáltját (azaz az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(t)\,dt$ integrál értékét minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén).

4. A céllövöldében, ha eltaláljuk a célpont körüli 1 cm sugarú kör alakú piros mezőt, kapunk egy pontot, egyébként nem. A lövedék becsapódásának célponthoz képesti koordinátái, X illetve Y független, normális eloszlású valószínűségi változók, 0 várható értékkel és $\sqrt{\log_4(e)}$ cm szórással. Ha 400 lövésből elérünk legalább k pontot, akkor nyerünk egy üveg pezsgőt: becsüljük meg, legalább mekkorának kell k-t választani, hogy ennek az esélye kevesebb legyen, mint 5% (az egyes lövések függetlennek tekinthetők).