

**Fizikus matematika szigorlat**      **Írásbeli, 2011. június 17.**  
**Pontozás: 12+13+12+13=50 pont**      **Jó munkát!**

1. Határozzuk meg az  $a, b, c, d, e$  paraméterek értékét úgy, hogy az

$$O = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 & a \\ -3 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

mátrix irányítástartó, (ill. irányításváltó) ortogonális transzformáció legyen! Az egyik irányítástartó esetben határozza meg mely egyenes körül és mekkora szöggel forog az  $O$  mátrix! (A forogtatás szögét elegendő képlettel megadnia.)

2. A  $\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormezőt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (zx^2 - y)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}.$$

Jelölje  $F$  az  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  felületet kifelé mutató felületi normálissal, és  $\gamma$  az  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$  körvonalat pozitív körüljárással. Számítsuk ki a következő felületi illetve vonalmenti integrálok értékét:

$$(a) \iint_F \mathbf{v}(\underline{r}) d\underline{f}, \quad (b) \oint_{\gamma} \mathbf{v}(\underline{r}) d\underline{r}.$$

3. Tekintsük az  $\dot{x} = -2x - y + 1$ ;  $\dot{y} = ax - 6y + 6$  differenciálegyenlet-rendszert, ahol  $a$  valós paraméter. (a) A  $a \in \mathbb{R}$  paraméter mely értékeire lesz a  $(0,1)$  izolált egyensúlyi pont, Ljapunov-stabil, Ljapunov asszimptotikus stabil, fókusz illetve nyeregpon?
- (b)  $a = 5$  esetén írjuk fel az általános megoldást és vázoljuk a fázisképet.
4. Egy légitársaság Budapest-Párizs járatán 200 férőhelyes repülőgépet üzemeltet, járatonként mégis 202 repülőjegyet értékesítenek, hiszen az utasok mindegyike egymástól függetlenül, kis valószínűséggel nem veszi igénybe érvényes repülőjegyét. Tapasztalatok szerint átlagosan 198 helyet foglalnak el végül az utasok.
- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott alkalommal az utasok száma meghaladja a férőhelyek számát?
- (b) Egy repülőutat a légitársaság statisztikusai zsúfoltnak minősítenek, ha legalább 197 hely foglalt. Becsüljük meg, 97% valószínűséggel az évi 400 alkalomból legalább hány lesz zsúfol?

Tételezzük fel, hogy mindig sikerül mind a 202 jegyet eladni, és tekintsük a 200-t illetve a 400-t „nagy” számoknak.

**Fizikus matematika szigorlat**      **Írásbeli, 2011. június 17.**  
**Pontozás: 12+13+12+13=50 pont**      **Jó munkát!**

1. Határozzuk meg az  $a, b, c, d, e$  paraméterek értékét úgy, hogy az

$$O = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 & a \\ -3 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

mátrix irányítástartó, (ill. irányításváltó) ortogonális transzformáció legyen! Az egyik irányítástartó esetben határozza meg mely egyenes körül és mekkora szöggel forog az  $O$  mátrix! (A forogtatás szögét elegendő képlettel megadnia.)

2. A  $\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormezőt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (zx^2 - y)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}.$$

Jelölje  $F$  az  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  felületet kifelé mutató felületi normálissal, és  $\gamma$  az  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$  körvonalat pozitív körüljárással. Számítsuk ki a következő felületi illetve vonalmenti integrálok értékét:

$$(a) \iint_F \mathbf{v}(\underline{r}) d\underline{f}, \quad (b) \oint_{\gamma} \mathbf{v}(\underline{r}) d\underline{r}.$$

3. Tekintsük az  $\dot{x} = -2x - y + 1$ ;  $\dot{y} = ax - 6y + 6$  differenciálegyenlet-rendszert, ahol  $a$  valós paraméter. (a) A  $a \in \mathbb{R}$  paraméter mely értékeire lesz a  $(0,1)$  izolált egyensúlyi pont, Ljapunov-stabil, Ljapunov asszimptotikus stabil, fókusz illetve nyeregpon?
- (b)  $a = 5$  esetén írjuk fel az általános megoldást és vázoljuk a fázisképet.
4. Egy légitársaság Budapest-Párizs járatán 200 férőhelyes repülőgépet üzemeltet, járatonként mégis 202 repülőjegyet értékesítenek, hiszen az utasok mindegyike egymástól függetlenül, kis valószínűséggel nem veszi igénybe érvényes repülőjegyét. Tapasztalatok szerint átlagosan 198 helyet foglalnak el végül az utasok.
- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott alkalommal az utasok száma meghaladja a férőhelyek számát?
- (b) Egy repülőutat a légitársaság statisztikusai zsúfoltnak minősítenek, ha legalább 197 hely foglalt. Becsüljük meg, 97% valószínűséggel az évi 400 alkalomból legalább hány lesz zsúfol?

Tételezzük fel, hogy mindig sikerül mind a 202 jegyet eladni, és tekintsük a 200-t illetve a 400-t „nagy” számoknak.