Fizikus matematika szigorlat   Írásbeli, 2010. május 25.
Pontozás: 13+12+12+13p.   Jó munkát!

1. Adott egy n fős társaság. Jelölje A_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és a j-dik tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja. (a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (c) Legyen most $n = 100$. Határozzuk meg azon napok számának várható értékét, melyen a társaság egyik tagjának sincsen születésnapja!
2. Rajzolja le az $\dot{x} = 2x - x^2 - xy$, $\dot{y} = 4y - xy + y^2$ autonóm diff.egyenletrendszer lokális fázisképét az egyensúlyi helyzetek közelében, és vizsgálja az egyensúlyi helyzeteket stabilitás szempontjából!
3. Határozza meg az $f(z) = \frac{\sin(2iz)}{e^z - e^{-z}}$ integrálját, a $|z| = 5$ kör mentén!
4. Határozza meg az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ homogén, egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Fizikus matematika szigorlat   Írásbeli, 2010. május 25.
Pontozás: 13+12+12+13p.   Jó munkát!

1. Adott egy n fős társaság. Jelölje A_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és a j-dik tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja. (a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (c) Legyen most $n = 100$. Határozzuk meg azon napok számának várható értékét, melyen a társaság egyik tagjának sincsen születésnapja!
2. Rajzolja le az $\dot{x} = 2x - x^2 - xy$, $\dot{y} = 4y - xy + y^2$ autonóm diff.egyenletrendszer lokális fázisképét az egyensúlyi helyzetek közelében, és vizsgálja az egyensúlyi helyzeteket stabilitás szempontjából!
3. Határozza meg az $f(z) = \frac{\sin(2iz)}{e^z - e^{-z}}$ integrálját, a $|z| = 5$ kör mentén!
4. Határozza meg az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ homogén, egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Fizikus matematika szigorlat   Írásbeli, 2010. május 25.
Pontozás: 13+12+12+13p.   Jó munkát!

1. Adott egy n fős társaság. Jelölje A_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és a j-dik tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja. (a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (c) Legyen most $n = 100$. Határozzuk meg azon napok számának várható értékét, melyen a társaság egyik tagjának sincsen születésnapja!
2. Rajzolja le az $\dot{x} = 2x - x^2 - xy$, $\dot{y} = 4y - xy + y^2$ autonóm diff.egyenletrendszer lokális fázisképét az egyensúlyi helyzetek közelében, és vizsgálja az egyensúlyi helyzeteket stabilitás szempontjából!
3. Határozza meg az $f(z) = \frac{\sin(2iz)}{e^z - e^{-z}}$ integrálját, a $|z| = 5$ kör mentén!
4. Határozza meg az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ homogén, egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Fizikus matematika szigorlat   Írásbeli, 2010. május 25.
Pontozás: 13+12+12+13p.   Jó munkát!

1. Adott egy n fős társaság. Jelölje A_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és a j-dik tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja. (a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (c) Legyen most $n = 100$. Határozzuk meg azon napok számának várható értékét, melyen a társaság egyik tagjának sincsen születésnapja!
2. Rajzolja le az $\dot{x} = 2x - x^2 - xy$, $\dot{y} = 4y - xy + y^2$ autonóm diff.egyenletrendszer lokális fázisképét az egyensúlyi helyzetek közelében, és vizsgálja az egyensúlyi helyzeteket stabilitás szempontjából!
3. Határozza meg az $f(z) = \frac{\sin(2iz)}{e^z - e^{-z}}$ integrálját, a $|z| = 5$ kör mentén!
4. Határozza meg az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ homogén, egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Fizikus matematika szigorlat Írásbeli, 2010. június 15.
Pontozás: 13+13+12+12p. Jó munkát!

1. Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. Menetrend szerint a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje normális eloszlású valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal kési le a buszcsatlakozást?

2. A $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (3x-y)\underline{\mathbf{i}} + (zx^2-y)\underline{\mathbf{j}} + (2xy+z)\underline{\mathbf{k}}.$$

Jelölje F a $z = 1-x^2-y^2,\ z \geq 0$ felületet kifelé mutató felületi normálissal, és γ az $x^2+y^2=1,\ z=0$ körvonalat pozitív körüljárással. Számítsuk ki a következő felületi illetve vonalmenti integrálok értékét:

$$\text{(a)} \iint_F \mathbf{v}(\underline{r})d\underline{f}, \qquad \text{(b)} \oint_\gamma \mathbf{v}(\underline{r})d\underline{r}. \qquad \text{(12 pont)}$$

3. Adjuk meg az $y^3y'' = 1$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

4. Írjuk fel $\mathbb{R}^3$ standard bázisában a $3x+2y-z=0$ síkra való tükrözés mátrixát! Adjuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, a mátrix rangját és determinánsát!

Fizikus matematika szigorlat Írásbeli, 2010. június 15.
Pontozás: 13+13+12+12p. Jó munkát!

1. Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. Menetrend szerint a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje normális eloszlású valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal kési le a buszcsatlakozást?

2. A $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (3x-y)\underline{\mathbf{i}} + (zx^2-y)\underline{\mathbf{j}} + (2xy+z)\underline{\mathbf{k}}.$$

Jelölje F a $z = 1-x^2-y^2,\ z \geq 0$ felületet kifelé mutató felületi normálissal, és γ az $x^2+y^2=1,\ z=0$ körvonalat pozitív körüljárással. Számítsuk ki a következő felületi illetve vonalmenti integrálok értékét:

$$\text{(a)} \iint_F \mathbf{v}(\underline{r})d\underline{f}, \qquad \text{(b)} \oint_\gamma \mathbf{v}(\underline{r})d\underline{r}. \qquad \text{(12 pont)}$$

3. Adjuk meg az $y^3y'' = 1$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

4. Írjuk fel $\mathbb{R}^3$ standard bázisában a $3x+2y-z=0$ síkra való tükrözés mátrixát! Adjuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, a mátrix rangját és determinánsát!