Fizika BSc matematika szigorlat
Írásbeli, október 6.

A 1., 2. és a 3. feladat kötelező, a 4A. és 4B. feladatok közül egyet kell választani.
Pontozás: $13 + 12 + 13 + 12 = 50$ pont. Jó munkát!

1. Legyen ξ egy $\lambda = 1$ paraméterű, Poisson eloszlású valószínűségi változó, η pedig legyen egyenletes eloszlású a $[0, \xi + 1]$ intervallumon.
   (a) Számoljuk ki η várható értékét és szórását.
   (b) Tudjuk, hogy $\eta < 1$. Mi ezen feltétel mellett $\xi = 0$ valószínűsége?

2. Számoljuk ki a következő improprius integrált:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + x + 1}\, dx = ? \qquad m = 1, 2, \ldots$$

   (*Útmutatás:* $\cos w = \mathrm{Re}(e^{iw})$.)

3. A $z = e^{-y}$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x(e^y - y') = 2$$

4A. Az $L^2[0, 2\pi]$ Hilbert-téren vezessük be a T^φ operátor-sereget ($\varphi \in \mathbb{R}$), valamint az M_k operátor-sereget ($k \in \mathbb{Z}$) a következőképpen:

$$\big(T^\varphi f\big)(x) := f\big((x - \varphi) \mod 2\pi\big);$$
$$\big(M_k f\big)(x) := e^{ikx} f(x);$$

   1. Határozzuk meg T^φ és M_k inverzét, adjungáltját, normáját!
   2. Mi a kapcsolat a $T^\varphi M_k$ és az $M_k T^\varphi$ operátorok között?

4B. Írjuk fel $\mathbb{R}^3$ standard bázisában a $3x + y - 2z = 0$ síkra való vetítés mátrixát! Adjuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, a mátrix rangját és determinánsát!

Mérnök-fizikusok matematika szigorlata
Írásbeli, október 6.

Pontozás: $13 + 12 + 13 + 12 = 50$ pont. Jó munkát!

1. Legyen ξ egy $\lambda = 1$ paraméterű, Poisson eloszlású valószínűségi változó, η pedig legyen egyenletes eloszlású a $[0, \xi + 1]$ intervallumon.
   (a) Számoljuk ki η várható értékét és szórását.
   (b) Tudjuk, hogy $\eta < 1$. Mi ezen feltétel mellett $\xi = 0$ valószínűsége?
2. Számoljuk ki a következő improprius integrált:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + x + 1}\, dx = ? \qquad m = 1, 2, \ldots$$
   (*Útmutatás:* $\cos w = \mathrm{Re}(e^{iw})$.)
3. A $z = e^{-y}$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:
$$x(e^y - y') = 2$$
4. Az $L^2[0, 2\pi]$ Hilbert-téren vezessük be a T^φ operátor-sereget ($\varphi \in \mathbb{R}$), valamint az M_k operátor-sereget ($k \in \mathbb{Z}$) a következőképpen:
$$\big(T^\varphi f\big)(x) := f\big((x - \varphi) \mod 2\pi\big);$$
$$\big(M_k f\big)(x) := e^{ikx} f(x);$$
   1. Határozzuk meg T^φ és M_k inverzét, adjungáltját, normáját!
   2. Mi a kapcsolat a $T^\varphi M_k$ és az $M_k T^\varphi$ operátorok között?