Fizika BSc matematika szigorlat
Írásbeli, 2008. május 21.

Az 1A. és 1B., valamint a 2A. és 2B. feladatok közül választani lehet. A 3. és a 4. feladatok kötelezőek. Pontozás: $14 + 12 + 12 + 12 = 50$ pont. Jó munkát!

1A. Tekintsük a
$$\varphi : L^4([-1,2]) \to \mathbf{C} \qquad f \mapsto \int_0^1 x f(x) dx$$
funkcionált! Határozzuk meg $\|\varphi\|$ értékét!

1B. Ábrázoljuk a
$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$
egyenletű másodrendű görbét.

2A. Határozzuk meg azt az $u(t,x)$; $t \geq 0$; $0 \leq x \leq 1$ függvényt, melyre:
$$9u_{tt} - u_{xx} = 0; \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0;\ \forall t \geq 0;$$
$$u(0,x) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) \text{ és } u_t(0,x) = \sin(6\pi x)\cos(2\pi x);\ 0 \leq x \leq 1.$$

2B. Keressük meg az alábbi, $\mathbb{R}^2$-n értelmezett differenciálegyenlet-rendszerek *izolált* egyensúlyi helyzeteit, és határozzuk meg a jellegüket (nyeregpont, centrum, stabil/instabil csomópont stb.)

(a) Vizsgáljuk az a valós paraméter minden lehetséges értéke mellett:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + 2y \\ \dot{y} &= -ax - (1+a)y. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin x. \end{aligned}$$

3. Legyen $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ és tekintsük a
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho^{-\alpha}\, \mathbf{k} \times \mathbf{r}$$
vektormezőt. ($\alpha > 0$ paraméter.)

(a) Számoljuk ki a $\operatorname{div} \mathbf{v}$-t és $\operatorname{rot} \mathbf{v}$-t.

(b) Az $\alpha > 0$ kitevő milyen értékére lesz $\mathbf{v}$ egyszerre divergencia és rotációmentes (és milyen halmazon)? Ebben a speciális esetben számoljuk ki a $\int\limits_{\gamma_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ és $\int\limits_{\gamma_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ vonalintegrálokat, ha γ_1 a $z = 0$; $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, γ_2 pedig a $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ kör.

4. A hivatalosan 50 grammos RANDOM csokoládé szeletek súlya valójában normális eloszlású, 49 gramm várható értékkel és 3 gramm szórással. A 60 perces valószínűségszámítás vizsgára 6 RANDOM szeletet viszek magammal, és szellemi teljesítőképességem növelésének érdekében 10 percenként ezek közül egyet-egyet elfogyasztok. Átmenni a vizsgán csak akkor van reményem, ha a 6 alkalomból legalább négyszer sikerül legalább 45 gramm csokit juttatnom a szervezetembe. Mi ennek az esélye?

Mérnök-fizikusok matematika szigorlata
Írásbeli, 2008. május 21.

A 2A. és 2B. feladatok közül választani lehet. Az 1., 3. és a 4. feladatok kötelezőek. Pontozás: $14 + 12 + 12 + 12 = 50$ pont. Jó munkát!

1. Tekintsük a

$$\varphi : L^4([-1,2]) \to \mathbf{C} \qquad f \mapsto \int_0^1 xf(x)dx$$

funkcionált! Határozzuk meg $\|\varphi\|$ értékét!

2A. Határozzuk meg azt az $u(t,x)$; $t \geq 0$; $0 \leq x \leq 1$ függvényt, melyre:

$$9u_{tt} - u_{xx} = 0; \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0;\ \forall t \geq 0;$$
$$u(0,x) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) \text{ és } u_t(0,x) = \sin(6\pi x)\cos(2\pi x);\ 0 \leq x \leq 1.$$

2B. Keressük meg az alábbi, $\mathbb{R}^2$-n értelmezett differenciálegyenlet-rendszerek *izolált* egyensúlyi helyzeteit, és határozzuk meg a jellegüket (nyeregpont, centrum, stabil/instabil csomópont stb.)

(a) Vizsgáljuk az a valós paraméter minden lehetséges értéke mellett:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + 2y \\ \dot{y} &= -ax - (1+a)y. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin x. \end{aligned}$$

3. Legyen $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ és tekintsük a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho^{-\alpha}\,\mathbf{k} \times \mathbf{r}$$

vektormezőt. ($\alpha > 0$ paraméter.)

(a) Számoljuk ki a $\operatorname{div}\mathbf{v}$-t és $\operatorname{rot}\mathbf{v}$-t.

(b) Az $\alpha > 0$ kitevő milyen értékére lesz $\mathbf{v}$ egyszerre divergencia és rotációmentes (és milyen halmazon)? Ebben a speciális esetben számoljuk ki a $\int_{\gamma_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ és $\int_{\gamma_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ vonalintegrálokat, ha γ_1 a $z = 0$; $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, γ_2 pedig a $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ kör.

4. A hivatalosan 50 grammos RANDOM csokoládé szeletek súlya valójában normális eloszlású, 49 gramm várható értékkel és 3 gramm szórással. A 60 perces valószínűségszámítás vizsgára 6 RANDOM szeletet viszek magammal, és szellemi teljesítőképességem növelésének érdekében 10 percenként ezek közül egyet-egyet elfogyasztok. Átmenni a vizsgán csak akkor van reményem, ha a 6 alkalomból legalább négyszer sikerül legalább 45 gramm csokit juttatnom a szervezetembe. Mi ennek az esélye?