Feladatmegoldó szeminárium 2.
12. óra
2013. 05. 08., 10.

1. 5 rab ül egy kerek asztal körül. Mindegyikük fején van egy fekete vagy egy fehér sapka. Senki sem látja a saját sapkáját, de látja mindenki másét. Meg kell tippelniük a saját sapkájuk színét (mindenki egyszerre tippel), és ha legalább egy rab helyesen tippel, mindegyiküket szabadon engedik. Van-e olyan stratégia, amellyel biztosan kiszabadulnak?

2. Legyenek a és b egész számok, és tegyük fel, hogy $x^2 + ax + b$ végtelen sok egész x-re négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

3. Legyen a_n nemnegatív elemű korlátos sorozat. Igazoljuk, hogy ha létezik egy $\mathcal{I}$ nullsűrűségű halmaz, hogy
$$\lim_{n\to\infty, n\notin\mathcal{I}} a_n = 0,$$
akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. (Emlékeztető: $\mathcal{I}$ nullsűrűségű halmaz, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{|\{1,2,\ldots n\}\cap\mathcal{I}|}{n} = 0$.)

4. Legyen G véges összefüggő gráf, A a szomszédsági mátrixa. Adjunk kombinatorikai jelentést az A^{20} elemeinek!

5. Tekintsük $\mathbb{R}^{n\times n}$-et, vagyis a valós elemű $n \times n$-es mátrixok vektorterét. Bizonyítsuk be, hogy az $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^T B)$ összefüggés skalárszorzatot definiál. Emlékeztetőül: egy valós vektortéren értelmezett kétváltozós függvény pontosan akkor skalárszorzat, ha
   - szimmetrikus: $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$
   - mindkét változójában lineáris: $\langle \alpha A+\beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle+\beta\langle B, C\rangle$ és $\langle A, \beta B+\gamma C\rangle = \beta\langle A, B\rangle+\gamma\langle A, C\rangle$, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
     (A szimmetria miatt elég ezek közül az egyiket feltenni.)
   - pozitív definit: $\langle A, A\rangle \geq 0$ és egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $A = 0$, a vektortér nulleleme.

6. Létezik-e olyan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény, amely
   - folytonos,
   - monoton nő,
   - f „majdnem mindenhol” deriválható és a deriváltja 0 (azaz ha nézzük az olyan pontok halmazát, ahol f deriválható és a deriváltja 0, azoknak az összhossza 1), és
   - $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$?

Beadandó feladatok

34. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkozést. Minden egyes mérkozésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pszeudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B-t, vagy van olyan C, hogy A legyőzte C-t és C legyőzte B-t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megvert mindenkit).
Igazoljuk, hogy ha pontosan 1 pszeudogyőztes van, akkor ő abszolút győztes. (3 pont)

35. Az A $n \times n$-es szimmetrikus mátrix minden sora az $\{1, 2, \ldots n\}$ számok egy permutációja, és n páratlan. Igazoljuk, hogy a főátló is az $\{1, 2, \ldots n\}$ számok egy permutációja! (3 pont)

36. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet kirakni egy egész élű kockát csupa különböző méretű, nála kisebb egész élű kockából hézagmentesen. (5 pont)