Feladatmegoldó szeminárium 2.
11. óra
2013. 04. 24. / 05. 03.

1. Felosztható-e a körlap véges sok egybevágó részre, melyek közül nem mindegyik tartalmazza a kör középpontját?

2. Bizonyítsuk be, hogy létezik tetszőlegesen sok egymást követő összetett szám.

3. Mutassuk meg, hogy a Pascal-háromszög bármely sorában a páratlan számok száma kettőhatvány. Számítsuk ki a kettő kitevőjét is.

4. Tegyük fel, hogy a síkrács minden mezőjébe be van írva egy-egy pozitív egész szám azzal a tulajdonsággal, hogy minden mezőben a szomszédos mezőkbe írt számok átlaga áll. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden szám egyenlő.

5. Béla és Jenő a következő játékot űzik: feldobnak egy szabályos érmét, és ha fej jön ki, Béla fizet Jenőnek 1 forintot, ha írás jön ki, Jenő fizet Bélának 1 forintot. Béla 4, Jenő 6 forinttal kezdi a játékot, és addig játszanak, amíg valamelyikük pénze el nem fogy. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Jenő pénze fogy el előbb (azaz Béla nyer)?

6. Legyen A egy téglalap alakú valós mátrix, melynek m sora és n oszlopa van ($m \leq n$). Bizonyítsuk be, hogy A^TA sajátértékei éppen AA^T sajátértékei és még $n-m$ darab 0.

<u>Beadandó feladatok</u>

31. Legyen f egy valós függvény. Tegyük fel, hogy x_0 fixpontja az f m-edik, és n-edik iteráltjának is valamilyen m, n pozitív egészekre. Milyen m, n-re következik ebből, hogy x_0 fixpontja f-nek? (3 pont)

32. Van-e 11 darab pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozat, amelyek differenciái rendre a $10, 11, \ldots, 20$ számok, és valahonnan kezdve lefedik az összes pozitív egészt? (3 pont)

33. Legyen a és d pozitív szám, és jelölje az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ számok számtani közepét A_n, mértani közepüket G_n. Igazoljuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}$$
(5 pont)