Feladatmegoldó szeminárium 2.
10. óra
2013. 04. 17./ 04. 26.

1. Egy repülőn 100 számozott ülőhely van. 100 utas szeretne felszállni, mindegyiküknek a jegye adott helyre szól. Az első felszálló azonban felszállás előtt véletlenül elhagyja a jegyét, ezért találomra választ egyet az ülések közül. Ezután minden egyes felszálló, ha még szabad a helye, akkor odaül, ha foglalt, akkor találomra választ egyet a még szabad helyek közül. Ottó száll fel utolsónak. Mekkora a valószínűsége, hogy a saját helyére ül le?

2. A 4×2-es és B 2×4-es mátrixok, melyekre

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

   Adjuk meg a BA mátrixot.

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$$

   függvény nem lehet periodikus.

4. Melyek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon elemei, amelyek relatív prímek a halmaz összes többi eleméhez?

5. Hogyan fejezhető ki egy kockadobás várható értéke a generátorfüggvény segítségével?

6. (a) Mutassuk meg, hogy a sík tetszőleges háromszöge átdarabolható adott magasságú téglalappá.
   (b) Adott két egyenlő területű konvex sokszög. Bizonyítsuk be, hogy átdarabolhatók egymásba, azaz mindkettő felbontható véges sok olyan részre, amelyek páronként egybevágóak.

Beadandó feladatok

28. Dobunk három szabályos tetraéderrel (minden oldalára egyforma valószínűséggel esik), melyek oldalain 1-től 4-ig szerepelnek a számok. Meg lehet-e kapni az összegük eloszlását két olyan (nem feltétlenül egyforma) oktaéder összegeként, melyek nem cinkeltek és oldalaikon pozitív egészek állnak? Adjuk meg az összes lehetőséget. (3 pont)

29. Legyen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ és

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$

   Hová konvergál x_n, amint $n \to \infty$? (3 pont)

30. Tegyük fel, hogy a $p(x)$ polinom minden gyöke valós. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $p'(x)$ polinomnak is minden gyöke valós, és ha a két polinom gyökeit növekvő sorba rendezzük, akkor $p(x)$ illetve $p'(x)$ gyökei felváltva követik egymást. (5 pont)