Feladatmegoldó szeminárium 2.
7. óra
2013. március 27./március 29.

1. Egy börtönben 100 rabot őriznek egymástól elkülönítve. Minden nap a rabok közül egyet átvisznek egy olyan terembe, ahol a falon van néhány kapcsoló. Miután ezeket a rab tetszése szerint átkapcsolta, visszaviszik a cellájába. A rabok sorrendjéről csak annyit tudunk, hogy minden rab sorra kerül előbb-utóbb, sőt, ez igaz tetszőleges későbbi időpont után is. A rabok akkor szabadulnak, ha valaki bejelenti, hogy már mindenkit átvittek a kapcsolós terembe, és ezt meg is tudja helyesen indokolni. Ha előzetesen megbeszélhetik a taktikájukat, hány kapcsolóra van szüksége a raboknak?

2. Az f valós függvényről tudjuk, hogy az $f^2, f^3, f^4, \ldots$ függvények mindegyike polinom. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f maga is polinom.

3. Adott az a_n valós számsorozat és

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, akkor a b_n számsorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

4. Konstruáljunk két – a normálistól különböző – dobókockát, amelyeken szintén pozitív egész számok vannak, és a dobott számok összege ugyanúgy viselkedik, mint két normális dobókocka esetén.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden elem másodrendű, akkor a csoport kommutatív.

6. Számítsuk ki az

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}\right]^n$$

sorozat határértékét.

Beadandó feladatok

19. A szabályos dobótetraéder egy olyan tetraéder, melynek oldalaira az $1, 2, \ldots, 4$ számokat írtuk, és minden oldalára $1/4$ valószínűséggel esik (másképpen mondva nem cinkelt). Konstruáljunk két – a szabályostól különböző – dobótetraédert, amelyek oldalain szintén pozitív egész számok vannak, nem cinkeltek, és a dobott számok összege ugyanúgy viselkedik, mint két szabályos dobótetraéder esetén. (3 pont)

19. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkozést. Minden egyes mérkozésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pszeudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B-t, vagy van olyan C, hogy A legyőzte C-t és C legyőzte B-t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megvert mindenkit).
Igazoljuk, hogy ha van 2 pszeudogyőztes, akkor van 3 is. (3 pont)

20. Mutassunk olyan többváltozós valós polinomot, amely nem veszi fel a 0-t, de felvesz a 0-hoz tetszőlegesen közeli értéket. (5 pont)