Feladatmegoldó szeminárium 2.
6. óra
2013. március 20./március 22.

1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényről tudjuk, hogy $f(x) \sim x^2$, amint $x \to \infty$. Következik-e ebből, hogy $f'(x) \sim 2x$?

2. Legyenek A, B, C $n \times n$-es mátrixok. Igazoljuk, hogy $Tr(AB) = Tr(BA)$, de általában $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$ (ahol $Tr(M)$ az M mátrix főáltóbeli elemeinek összege, "nyoma").

3. Létezik-e olyan korlátos síkbeli halmaz, melynek van önmagával egybevágó, valódi része?

4. Egy 21 fős osztályban van néhány klub. Tudjuk, hogy minden klub tagszáma páratlan szám, viszont bármely két klub metszetének számossága páros. Legyfeljebb hány klub lehet az osztályban?

5. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkőzést. Minden egyes mérkőzésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pszeudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B-t, vagy van olyan C, hogy A legyőzte C-t és C legyőzte B-t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megvert mindenkit).

   Bizonyítsuk be, hogy mindig van legalább egy pszeudogyőztes.

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges konvergens sornál van nála aszimptotikusan nagyobb konvergens sor, vagyis ha $a_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, akkor található hozzá olyan b_n sorozat, hogy $b_n/a_n \to \infty$, mégis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Beadandó feladatok

16. Léteznek-e olyan $p_i, i \geq 1$ pozitív számok, melyekre $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, és $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log(1/p_i) = \infty$? (3 pont)

17. Jelölje $A(n)$ az $n!$ tízes számrendszerbeli alakjának végén található nullák számát. Mennyi $A(n)$ aszimptotikusan? (3 pont)

18. Mutassuk meg, hogy tetszőleges divergens sornál van nála aszimptotikusan kisebb divergens sor, vagyis ha $a_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, akkor található hozzá olyan b_n sorozat, hogy $b_n/a_n \to 0$, mégis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$. (5 pont)