

Feladatmegoldó szeminárium 2.

5. (pót)óra

2013. március 13./március 19.

1. Adott a síkon 1000 pont és egy egység sugarú körvonal. Igazoljuk, hogy létezik a körvonalon olyan pont, amelynek az 1000 adott ponttól vett távolság összege legalább 1000!
2. Mennyi $\log(n!)$ aszimptotikusan?
3. Legyen p prím és f egy legfeljebb $p - 1$ -edfokú polinom, amelyre igaz, hogy $p \mid f(x)$ minden egész x esetén. Igazoljuk, hogy f együtthatói oszthatók p -vel!
4. Létezik-e olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely
 - pontosan az irracionális számokban folytonos?
 - pontosan a racionális számokban folytonos?

Beadandó feladatok

13. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re van a síkon olyan kör, aminek a belsejében pontosan n rácspont található, és a határán nincs rácspont. (3 pont)
14. Legyen $\langle G, + \rangle$ véges csoport, és $A \subseteq G$ tartalmazza G elemeinek több, mint felét. Mutassuk meg, hogy G minden eleme előáll két A -beli elem összegeként. (3 pont)
15. Bizonyítsuk be, hogy a sík nem fedhető le körlapokkal úgy, hogy azok legfeljebb a határukon érintkezzenek. (5 pont)