Feladatmegoldó szeminárium 2.
4. óra
2013. március 6./március 8.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az f legfeljebb másodfokú egész együtthatós polinomra $5|f(x)$ minden egész x-re, akkor f minden együtthatója osztható 5-tel.
2. Igazoljuk, hogy a
$$\prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$
végtelen szorzat konvergens.
3. Tekintsük az
$$A_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
összeggel definiált számsorozatot. Mennyi $\lim_{n\to\infty} A_n$?
4. Létezik-e olyan f háromszor deriválható valós függvény, amelyre $f \neq f'$, $f \neq f''$, de $f = f'''$ teljesül?
5. Igazoljuk, hogy létezik olyan legfeljebb 30adfokú polinom, amely
   - palindrom, azaz ha $p(x) = a_{30}x^{30} + \dots a_1x + a_0$, akkor $a_k = a_{30-k}$ minden $0 \leq k \leq 30$-ra,
   - minden monomja ax^{3k} alakú, ahol k egész,
   - gyöke az $1, 2, 3, 4, 5$ számok mindegyike.
6. Legyen $f_t(x) = e^{xt}$. Lássuk be, hogy az $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ lineárisan független halmaz a folytonos valós függvények vektorterében. Azaz mutassuk meg, hogy ha n pozitív egész, $t_1, t_2, \dots, t_n$ különböző valós számok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tetszőleges valós számok esetén
$$\lambda_1 e^{t_1 x} + \lambda_2 e^{t_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{t_n x}$$
az azonosan 0 függvény, akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

<u>Beadandó feladatok</u>

10. Legyen
$$A(N) = \sum_{n=1}^{N} n^5.$$
Mennyi $A(n)$ aszimptotikusan? (3 pont)
11. Mennyi
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(4\sin x + 3\cos x)$$
értéke? (3 pont)
12. Jenő gondolt 20 pozitív egész számra. Megkérdezhetjük tőle a 20 szám bármely valós együtthatós lineáris kombinációját. Legalább hány kérdésre van szükség, ha biztosan ki szeretnénk találni a számokat? (5 pont)
13. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re van a síkon olyan kör, aminek a belsejében pontosan n rácspont található, és a határán nincs rácspont. (3 pont)
14. Legyen $\langle G, + \rangle$ véges csoport, és $A \subseteq G$ tartalmazza G elemeinek több, mint felét. Mutassuk meg, hogy G minden eleme előáll két A-beli elem összegeként. (3 pont)
15. Bizonyítsuk be, hogy a sík nem fedhető le körlapokkal úgy, hogy azok legfeljebb a határukon érintkezzenek. (5 pont)