Feladatmegoldó szeminárium 2.
3. óra
2013. február 27./március 1.

1. Egy hattagú kalózcsapat szeretne megosztozni a zsákmányolt 100 aranyon a következő módon. A kalózok között egy mindegyikük által elfogadott rangsor áll fenn. A vezető javaslatot tesz az aranyak szétosztására, amiről mindenki szavaz, hogy elfogadja-e vagy sem. Ha a kalózok legalább fele (a javaslattevőt is beleértve) elfogadja ezt, akkor megtörténik a szétosztás. Ellenkező esetben megölik a vezetőt, és ugyanezen eljárással folytatják az osztozkodást, vagyis az eredeti rangsorban második helyen álló tesz javaslatot. Az aranyak oszthatatlanok. A kalózok semmiképpen nem akarnak meghalni, emellett minél több aranyat szeretnének maguknak, és vérszomjasak, azaz ha számukra ugyanannyi aranyat jelent egy döntés két kimenetele, akkor azt választják, amelyikkel valakit megölhetnek. Mi lesz az osztozkodás eredménye, ha a kalózok racionálisan gondolkodnak?

2. Független rendszert alkotnak-e az alábbi függvények a valós függvények vektorterében?
   (a) $1, \cos^2 x, \cos(2x)$
   (b) $1, \sin x, \cos x$

3. 13 *valós* számról tudjuk, hogy közülük bármely 12 két hatos csoportra osztható úgy, hogy a két csoport összege egyenlő. Következik-e ebből, hogy a 13 szám egyenlő?

4. Adott egy véges, zárt I intervallum, és egy $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(I) \subseteq I$, akkor f-nek van fixpontja.

5. Jelölje $a(R)$ azon (x, y) rácspontok számát a síkon, melyekre $x^2 + y^2 \leq R^2$. Mennyi $a(R)$ aszimptotikusan, amint $R \to \infty$?

6. (Cauchy-függvényegyenlet.) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre teljesül, hogy
$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}.$$
   Bizonyítsuk be, hogy ekkor f csak lineáris függvény lehet, azaz létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = cx$.

Beadandó feladatok

7. Adott egy véges, zárt I intervallum, és egy $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $I \subseteq f(I)$, akkor f-nek van fixpontja. (3 pont)

8. Tekintsünk egy $n \times n \times n$-es (3 dimenziós) „sakktáblát”, melynek egyik sarokkockájában egy huszár áll. A huszár minden lépésben egyik irányban 2, másik irányban 1, harmadik irányban pedig 0 mezővel léphet arrébb (ahogy a hagyományos sakkban is). Határozzuk meg, mennyi a minimális lépésszám, amivel elérheti az átellenes sarkot (vagyis azt, ahová a kocka testátlója vezet). (3 pont)

9. Legyen $a(n)$ azon természetes számok száma, melyek kisebbek, mint n és a prímosztóik között csak 2 és 3 szerepel. Mennyi $a(n)$ aszimptotikusan, amint $n \to \infty$? (5 pont)