Feladatmegoldó szeminárium 2.
2. óra
2013. február 20./ 22.

1. Legyenek f és g $[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $f(x) > g(x)$ minden $x \in [0,1]$-re. Igazoljuk, hogy létezik $\varepsilon > 0$, hogy $f(x) > g(x) + \varepsilon$ minden $x \in [0,1]$-re.

2. Létezik-e olyan konvex poliéder, amelynek 13 db lapja van, és ezek mind háromszögek?

3. Legyen a_n pozitív elemü sorozat. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pontosan akkor véges, ha $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ véges.

4. (a) $\sum_{k=0}^{1006} \binom{2013}{2k} =?$

   (b) $\sum_{k=0}^{671} \binom{2013}{3k} =?$

5. Transzcendensnek nevezünk egy valós számot, ha nem áll elő egész együtthatós polinom gyökeként. Igazoljuk, hogy létezik transzcendens szám!

6. Jenő gondolt 20 valós számra. Megkérdezhetjük tőle ezen számok tetszőleges valós együtthatós lineáris kombinációját. Legalább hány kérdésre van szükségünk, ha ki akarjuk találni a számokat?

Beadandó feladatok

4. $\sum_{k=0}^{503} \binom{2013}{4k} =?$ Válaszként egy egész számot várunk! (3 pont)

5. Igazoljuk, hogy minden konvex poliédernek van két azonos élszámú lapja! (3 pont)

6. Adjunk meg olyan 0–1-mátrixokat, amelyeknek exponenciálisan nő a determinánsa. Vagyis mutassunk minden n-re olyan $n \times n$-es A_n mátrixot, amelynek csak 0-k és 1-esek az elemei, és $\det A_n > d \cdot c^n$ valamely $c > 1$ és $d > 0$ számokkal. (5 pont)