Feladatmegoldó szeminárium 1.
10. óra
2011. 11. 17.

1. Legyen p_n az n-edik prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$, akkor az $N = p_n + p_{n+1}$ szám legalább három (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzata.
2. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény. Milyen viszonyban áll a következő két tulajdonság:
   (a) f véges sok pontot kivéve folytonos, illetve
   (b) f véges sok pont kivételével megegyezik egy folytonos függvénnyel?
3. Felveszünk egy körvonalon n pontot, majd mindet összekötjük mindegyik másikkal. Legfeljebb hány metszéspontja van a keletkező húroknak a kör belsejében?
4. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hatványok reciprokösszege véges.
5. Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olyan pozitív egészek, melyek összege $2n-2$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan fa, melynek ezek a fokszámai.
6. A rozsomák ismét menekül, ezúttal a számegyenes nemnegatív felén. Az origóból indul, a sebessége egy állandó pozitív valós szám. Minden perc végén ledobhatunk egy 1 cm széles csapdát a számegyenesre, ami az alatta lévő állatokat befogja. El tudjuk-e kapni biztosan a rozsomákot?

Beadandó feladatok

28. Egy 50 fős társaságban mindenkinek legfeljebb 3 haragosa van a többiek között (a haragosság kölcsönös). A társaság kirándulni megy két busszal. Szétoszthatók-e az emberek két részre úgy, hogy mindenki csak legfeljebb egy haragosával kerüljön egy buszra? (A buszok 50 fősek.) (3 pont)
29. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ olyan végtelen sorozat, melyben minden elem a 2 és 3 számok egyike, és legyen
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \cdots = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1b_2} + \frac{1}{b_1b_2b_3} + \cdots$$
Bizonyítandó, hogy ekkor a két sorozat megegyezik. (3 pont)
30. Bizonyítsuk be, hogy a
$$2^{2^0} + 1, 2^{2^1} + 1, \ldots, 2^{2^k} + 1, \ldots$$
sorozat tagjai páronként relatív prímek. (5 pont)