Szöveges szélsőérték-feladatok

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!

6.[hf] Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

7.[hf] Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?

8.[hf] Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64+l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

9.[hf] Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha t órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel $10(1+1/t)$ óra alatt végez, viszont a festés után megint t órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell t értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?

10.[hf] Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

11.[hf] Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége $2,4$ m, illetve $1,6$ m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

12.[hf] Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete K. Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

Megoldások

■ 1. feladat

Jelölje x a kivágott négyzetek oldalát. Ekkor a doboz térfogata: $V(x) = x(1 - 2x)(2 - 2x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$, ahol $0 < x < \frac{1}{2}$. A V függvény maximumát keressük.

$V'(x) = 12x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$ vagy $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$. A V függvénynek x_1-ben lehet maximuma, x_2 a feladat szövege miatt nem jöhet szóba.
$V''(x) = 24x - 12$ és $V''(x_1) = -4\sqrt{3} < 0$, tehát itt valóban maximum van.

■ 2. feladat

Jelölje x az egyenes szakaszok hosszát és r a félkörívek sugarát. Ekkor a futópálya hossza $400 = 2x + 2r\pi$. A focipálya területe $2rx$. Az egyenletből például x-et kifejezve, $x = 200 - r\pi$, így keressük a $T(r) = 2r(200 - r\pi)$ függvény maximumát. $T'(r) = 400 - 4\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{100}{\pi}$, itt lehet szélsőérték. $T''(r) = -4\pi < 0$, tehát ez valóban maximum. A focipálya területe akkor maximális, ha a félkörívek sugara $r = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$ m, az egyenes szakaszok hossza $x = 100$ m.

■ 3. feladat

Az $f(x) = \left(100 - 30(x-1)^2\right) \cdot 50(x-1) \cdot \frac{1}{100} = -35 + 5x + 45x^2 - 15x^3$ függvény maximumát keressük. $f'(x) = 5 + 90x - 45x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{3}$. A lehetséges szélsőértékhely $\frac{3+\sqrt{10}}{3} \approx 2.05$, mivel a negatív gyök nyilván nem jöhet szóba. Könnyen látható, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (vagy a második derivált negatív), így itt valóban maximum van. Tehát a bérek 2.05-szörösére emelésével érhető el a legtöbb szavazat.

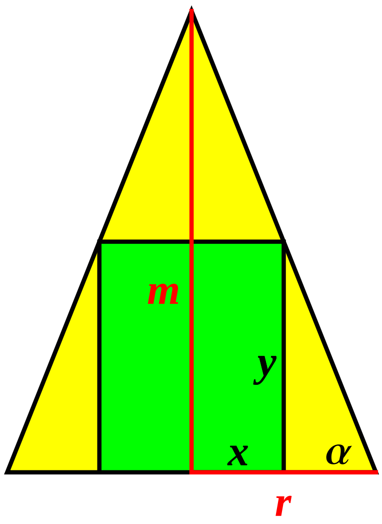
■ 4. feladat

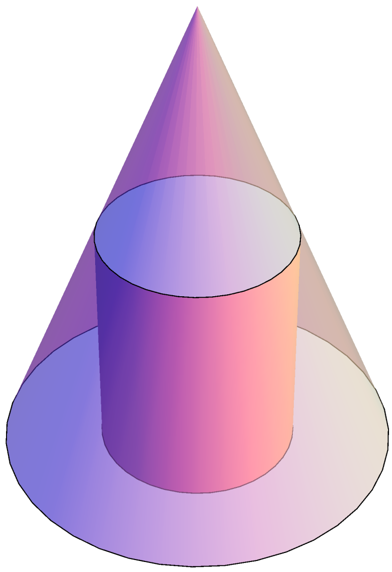
1. megoldás: Jelölje a és b a derékszögű háromszög befogóit. Ekkor $a^2 + b^2 = 100$ és a területe $\frac{ab}{2}$. Az egyenletből b-t kifejezve, keressük a $T(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{100 - a^2}$ függvény maximumát, ahol $0 < a < 10$.
$T'(a) = -\frac{a^2}{2\sqrt{100-a^2}} + \frac{\sqrt{100-a^2}}{2} = \frac{50-a^2}{\sqrt{100-a^2}} = 0$, ahonnan $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (mivel $a > 0$), itt lehet szélsőérték. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (azaz $T'(a) > 0$, ha $a < 5\sqrt{2}$ és $T'(a) < 0$, ha $a > 5\sqrt{2}$), tehát a háromszög területe akkor maximális, ha $a = b = 5\sqrt{2} \approx 7,1$ cm.

2. megoldás: Felhasználva a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$, azaz $\frac{100}{2} \geq ab = 2T$. Innen látható, hogy a háromszög területe: $T \leq 25$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a^2 = b^2$, azaz $a = b = 5\sqrt{2}$.

5. feladat

A kúp magassága $m = 5$, alapkörének sugara $r = 2$. Jelölje x a henger alapkörének sugarát, y a henger magasságát és α a kúp alkotójának az alapkör síkjával bezárt szögét. Ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{r} = \frac{y}{r-x}$. A henger térfogata, amelynek a maximumát keressük: $V(x) = x^2 y = \frac{5}{2} x^2(2-x) = -\frac{5x^3}{2} + 5x^2$, ahol $0 < x < 2$. Ekkor $V'(x) = -\frac{15x^2}{2} + 10x = 0$, ahonnan $x = \frac{4}{3}$ (mivel $x > 0$). Ebben a pontban valóban maximum van, mert $V''(x) = -15x + 10$, így $V''\left(\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$. A maximális térfogatú henger sugara $x = \frac{4}{3}$, magassága $y = \frac{5}{3}$.





6. feladat

A fizetendő adó $10^{13} \cdot y$ forint lenne, de ebből nem fizetnek be $10^{13} \cdot y \cdot y^3$ forintot. A befizetett adó a kettő különbsége, így keressük az $f(y) = 10^{13}\, y\left(1-y^3\right)$ függvény maximumát. $f'(y) = 10^{13}\left(1-4y^3\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0.63$, itt lehet szélsőérték. Ebben a pontban a második derivált negatív, tehát itt valóban maximum van, az adókulcsot 63 %-ra kell állítani, hogy a lehető legtöb pénz folyjon be.

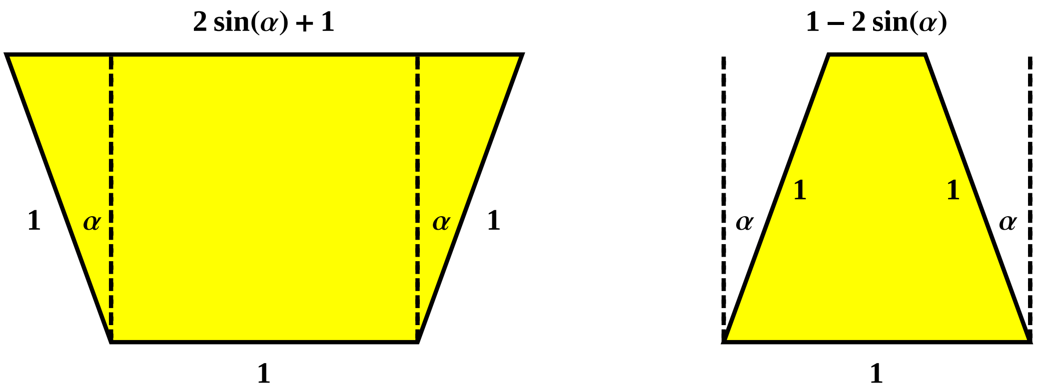
7. feladat

Jelölje α a trapéz szárainak a függőlegessel bezárt szögét. Ekkor a trapéz magassága $\cos\alpha$. Ha a szárak párhuzamosak, akkor a trapéz rombusz, így területe akkor maximális, ha négyzet (területe $1 \cdot \cos\alpha$, ami $\alpha = 0$-nál maximális.)

Ha a szárak nem párhuzamosak, akkor a szemközti oldal hossza $1 - 2\sin\alpha$, ha a szárak "befelé" hajlanak, és $1 + 2\sin\alpha$, ha a szárak "kifelé" hajlanak. Összefoglalva, tekinthetjük úgy, hogy a szemközti oldal hossza

$1 + 2\sin\alpha$, ahol α negatív is lehet, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$-nál kapnánk szabályos háromszöget.

Keressük a $T(\alpha) = \frac{1+(1+2\sin\alpha)}{2}\cos\alpha = (1+\sin\alpha)\cos\alpha$ függvény maximumát a $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ intervallumon. $T(\alpha) = \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, így a $T'(\alpha) = -\sin\alpha + \cos 2\alpha = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Felhasználva, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$-ra a $-2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $\sin\alpha = -1$ vagy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Az értelmezési tartománnyal összevetve azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{\pi}{6}$-nál lehet a függvénynek maximuma. A második derivált $T''(\alpha) = -\cos\alpha - 2\sin 2\alpha$ és $T''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$, tehát itt valóban maximum van. Ekkor a száraknak a hosszabbik alappal bezárt szöge $\frac{\pi}{3}$.



8. feladat

Ha egy vödörbe L liter víz fér, akkor $\frac{10\,000}{L}$ fordulóra lesz szükség, ami $\frac{10\,000}{L}\left(64 + L^2\right)$ ideig tart. Tehát keressük az $F(L) = 10\,000\left(\frac{64}{L} + L\right)$ függvény minimumát, ahol $L > 0$. $F'(L) = 10\,000\left(1 - \frac{64}{L^2}\right) = 0$, ahonnan $L = 8$ a lehetséges szélsőértékhely. Mivel $F''(L) = 10\,000 \cdot \frac{128}{L^3}$ és $F''(8) > 0$, ezért F-nek itt valóban minimuma van.

9. feladat

Az $f(t) = 2t + 10\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ függvény minimumát keressük, ahol $t > 0$. $f'(t) = 2 - \frac{10}{t^2} = 0$, ahonnan $t = \sqrt{5} \approx 2.24$, itt lehet szélsőérték. Mivel $f''(t) = \frac{20}{t^3}$ és így $f''\left(\sqrt{5}\right) > 0$, ezért ebben a pontban valóban minimuma van a függvénynek.

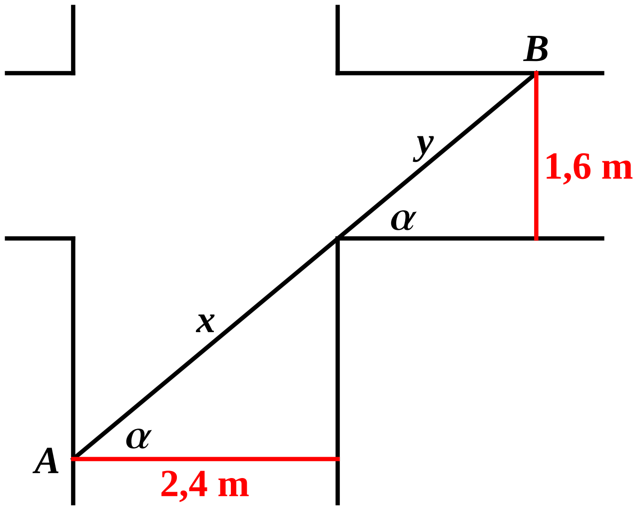
10. feladat

Jelölje AB a létrát. Az ábra épp a maximális hosszúságú létrát szemlélteti fordulás közben. Az AB szakasz x és y része α-val kifejezhető:

$\mathrm{AB} = f(\alpha) = \frac{2{,}4}{\cos\alpha} + \frac{1{,}6}{\sin\alpha}$. A szélsőérték meghatározásához deriváljuk $f(\alpha)$-t:

$$f'(\alpha) = \frac{2{,}4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1{,}6\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{0{,}8}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left(3\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha\right).$$

$f'(\alpha) = 0$, ha $3\sin^3\alpha = 2\cos^3\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.8736$, $\alpha \approx 41\,°$. AB = 3, 2 + 2, 4 = 5, 6 m.



■ 11. feladat

A hajó 1 óra alatt v kilométert tesz meg, ezalatt $A + B$ forint a kiadás. A kilométerenkénti költség: $f(v) = \frac{A+B}{v} = 0,03\, v^2 + \frac{480}{v}$. Szélsőérték ott lehet, ahol $f'(v) = 0,06\, v - \frac{480}{v^2} = 0$, azaz $v = 20$.
$f''(v) = 0,06 + \frac{960}{v^3}$, így $f''(20) > 0$, ezért itt valóban minimum van, a kilométerenkénti költség $v = 20$ km/h-s sebességnél a legkisebb.

■ 12. feladat

Jelölje r a félkör sugarát, ekkor a téglalap vízszintes oldala $2\, r$. A téglalap függőleges oldalát jelölje x. Az ablak kerülete $K = 2\, x + 2\, r + r\, \pi$, területe $T = \frac{1}{2}\, r^2\, \pi + 2\, r\, x$. Az első egyenletből $2\, x$-et kiefejezve, keressük a $T(r) = \frac{1}{2}\, r^2\, \pi + r(K - 2\, r - r\, \pi) = K\, r - \frac{1}{2}\, (4 + \pi)\, r^2$ függvény maximumát.
$T'(r) = K - (4 + \pi)\, r = 0$, ahonnan $r = \frac{K}{4+\pi}$ a lehetséges maximumhely. Mivel $T''(r) = -(4 + \pi) < 0$, ezért itt valóban maximum van, és ekkor $x = \frac{K}{4+\pi}$.