Komplex számok, megoldások

Feladatsor: https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/komplex.pdf

Segédanyag: https://math.bme.hu/bevmat/szogfuggvenyek.pdf

Feladatok

1. Határozza meg a $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2\,i$ és $z_2 = 2 + i$.

Megoldás. $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \dfrac{\overline{3-2\,i}}{\overline{2+i}} = \dfrac{3+2\,i}{2-i} = \dfrac{3+2\,i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{6+4\,i+3\,i+2\,i^2}{4-i^2} = \dfrac{6+4\,i+3\,i+2\,(-1)}{4-(-1)} = \dfrac{4+7\,i}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{5}\,i$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

a) $3\left(\cos\dfrac{2\,\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\,\pi}{3}\right)$ b) $\dfrac{2+i}{i(1-4\,i)}$

Megoldás. *a)* $3\left(\cos\dfrac{2\,\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\,\pi}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{3\,\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{2+i}{i(1-4\,i)} = \dfrac{2+i}{i-4\,i^2} = \dfrac{2+i}{i-4\,(-1)} = \dfrac{2+i}{4+i} = \dfrac{2+i}{4+i} \cdot \dfrac{4-i}{4-i} = \dfrac{8-i^2+4\,i-2\,i}{16-i^2} = \dfrac{8-(-1)+2\,i}{16-(-1)} = \dfrac{9+2\,i}{17} = \dfrac{9}{17} + \dfrac{2}{17}\,i$

3. Írja fel a következő számok trigonometrikus alakját:

a) $\sqrt{6} - i\,\sqrt{2}$ b) $-4\,i$ c) 8

Megoldás. Írjuk fel a $z = a + b\,i$ komplex számot $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Készítsünk ábrát!

a) $z = \sqrt{6} - i\,\sqrt{2} \implies r = |\,z\,| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\,\sqrt{2}$

$\implies z = 2\,\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)$

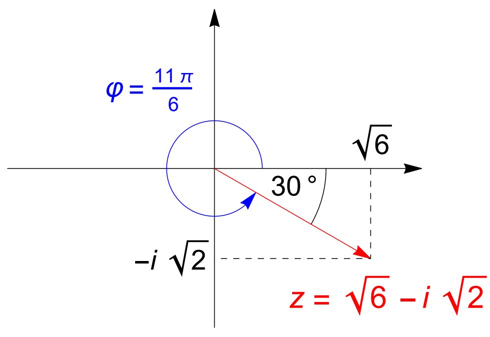
$\implies$ az argumentum: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \implies \varphi = \dfrac{11\,\pi}{6}$

$\implies z = 2\,\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\,\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\,\pi}{6}\right)$

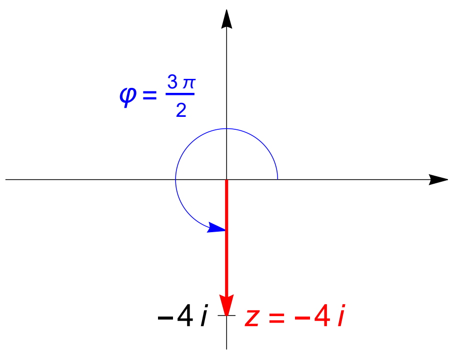
b) $z = -4\,i = 4\,(0 + (-1)\cdot i) = 4\left(\cos\dfrac{3\,\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\,\pi}{2}\right)$

c) $z = 8 = 8\,(1 + 0\cdot i) = 8\,(\cos 0 + i\sin 0)$

a)



b)



4. Végezze el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$

Megoldás.

a) $\sqrt[3]{1}$ értékeit a $z^3 = 1$ egyenlet megoldásából kapjuk.

Írjuk fel az 1-et trigonometrikus alakban: $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$\Longrightarrow z_k = \cos \dfrac{0 + k \cdot 2\pi}{3} + i \sin \dfrac{0 + k \cdot 2\pi}{3}$, ahol $k = 0, 1, 2$.

A gyökök:

Ha $k = 0$: $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

Ha $k = 1$: $z_1 = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ha $k = 2$: $z_2 = \cos \dfrac{4\pi}{3} + i \sin \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt[4]{-16}$ értékeit a $z^4 = -16$ egyenlet megoldásából kapjuk.

Írjuk fel a –16-ot trigonometrikus alakban: $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\Longrightarrow z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos \dfrac{\pi + k \cdot 2\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi + k \cdot 2\pi}{4}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

A gyökök:

Ha $k = 0$: $z_0 = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Ha $k = 1$: $z_1 = 2\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \sin \dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Ha $k = 2$: $z_2 = 2\left(\cos \dfrac{5\pi}{4} + i \sin \dfrac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Ha $k = 3$: $z_3 = 2\left(\cos \dfrac{7\pi}{4} + i \sin \dfrac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$ értékeit a $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$ egyenlet megoldásából kapjuk.

Írjuk fel az $1 + i\sqrt{3}$-at trigonometrikus alakban: $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \sin \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Longrightarrow z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi}{3}\right),$$ ahol $k = 0, 1, 2.$

A gyökök:

Ha $k = 0$: $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) \approx 1.18394 + 0.430918\, i$

Ha $k = 1$: $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right) \approx -0.965156 + 0.809862\, i$

Ha $k = 2$: $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right) \approx -0.218783 - 1.24078\, i$

5. Végezze el a következő hatványozásokat:
a) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ b) $(1 + i)^8$ c) $(1 - i)^4$

Megoldás.

a) $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Longrightarrow \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1 + i\cdot 0) = -8$$

b) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Longrightarrow (1 + i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right) = 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$$

vagy:

$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$$\Longrightarrow (1 + i)^8 = \left((1 + i)^2\right)^4 = (2i)^4 = 16\cdot\left(i^2\right)^2 = 16\cdot(-1)^2 = 16$$

c) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\Longrightarrow (1 - i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{4}\right)\right) = 4(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = 4(-1 + i\cdot 0) = -4$$

vagy:

$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

$$\Longrightarrow (1 - i)^4 = \left((1 - i)^2\right)^2 = (-2i)^2 = 4\cdot i^2 = 4\cdot(-1) = -4$$

6. Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $z^3 = 1 + i$ b) $|z| - z = 1 + 2i$ c) $z^2 = \overline{z}$

Megoldás. a) Írjuk fel az $1 + i$-t trigonometrikus alakban: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Longrightarrow z_k = \sqrt[3]{1 + i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right),$$ ahol $k = 0, 1, 2.$

Az argumentumok: $k = 0 \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12}$

$k = 1 \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2 \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$

A gyökök:

Ha $k = 0$: $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 1.08422 + 0.290515\, i$

Ha $k = 1$: $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \approx -0.793701 + 0.793701\, i$

Ha $k = 2$: $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right) \approx -0.290515 - 1.08422\, i$

6. b) $|z| - z = 1 + 2i$

Megoldás. b) Legyen $z = x + y\,i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, így az egyenlet:

$$|z| - z = 1 + 2i \iff \sqrt{x^2 + y^2} - (x + y\,i) = 1 + 2i$$
$$\iff \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) - y\,i = 1 + 2\,i$$

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha a valós képzetes részük is egyenlő, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(1) $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$

(2) $-y = 2$

Innen $y = -2$, így az első egyenletből $\sqrt{x^2 + 4} - x = 1 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = x + 1$.
Mivel $\sqrt{x^2 + 4} \geq 0$, ezért $x + 1 \geq 0$, azaz $x \geq -1$. Négyzetre emelve és rendezve:
$x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow 2x = 3 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$, erre teljesül az előző feltétel.

A feladat megoldása: $z = \frac{3}{2} - 2i$.

6. c) $z^2 = \bar{z}$

Megoldás. c) Legyen $z = x + y\,i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 + 2\,x\,y\,i + y^2 i^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2\,x\,y\,i$
- $\bar{z} = x - y\,i$

Így az egyenlet:

$$z^2 = \bar{z} \iff \left(x^2 - y^2\right) + 2\,x\,y\,i = x - y\,i$$
$$\iff \left(x^2 - y^2\right) + 2\,x\,y\,i - x + y\,i = 0$$

Egy komplex szám pontosan akkor 0, ha valós és képzetes része is 0, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(1) $\left(x^2 - y^2\right) - x = 0$

(2) $2\,x\,y + y = 0$

A (2) egyenletet alakítsuk szorzattá: $y(2x+1)=0$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így két esetet vizsgálunk.
1. eset: ha $y=0$, akkor ezt az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$\left(x^2-y^2\right)-x=0 \implies x^2-x=x(x-1)=0$$

Innen $x_1=0$ és $x_2=1$, így ebben az esetben két komplex megoldást kapunk:
$z_1=0+0\cdot i=0$ és $z_2=1+0\cdot i=1$.

2. eset: ha $2x+1=0$, akkor $x=-\frac{1}{2}$. Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$\left(x^2-y^2\right)-x=0 \implies \frac{1}{4}-y^2+\frac{1}{2}=0 \implies y^2=\frac{3}{4}$$

Innen $y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, így ebben az esetben is két komplex megoldást kapunk:
$z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A feladat megoldása: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! (Az eredményt algebrai alakban adja meg.)

a) $z^2+(1+i)\overline{z}+4i=0$ b) $2iz^3=(1+i)^8$

Megoldás. a) Legyen $z=x+yi$, ahol $x, y\in\mathbb{R}$. Ekkor

- $z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$
- $(1+i)\overline{z}=(1+i)(x-yi)=x-yi^2+xi-yi=(x+y)+(x-y)i$

Így az egyenlet:

$$z^2+(1+i)\overline{z}+4i=0 \iff \left(x^2-y^2\right)+2xyi+(x+y)+(x-y)i+4i=0$$

Egy komplex szám pontosan akkor 0, ha valós és képzetes része is 0, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(1) $\left(x^2-y^2\right)+(x+y)=0$
(2) $2xy+(x-y)+4=0$

Az (1) egyenletet alakítsuk szorzattá: $(x-y)(x+y)+(x+y)=0$
$(x+y)(x-y+1)=0$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így két esetet vizsgálunk.

1. eset: ha $x+y=0$, akkor $y=-x$. Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$2\,x\,y + (x - y) + 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2\,x\,(-x) + (x + x) + 4 = 0$$
$$-2\,x^2 + 2\,x + 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)\,(x + 1) = 0$$

E másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$, ahonnan $y_1 = -2$ és $y_2 = 1$, így ebben az esetben két komplex megoldást kapunk: $z_1 = 2 - 2\,i$ és $z_2 = -1 + i$.

2. eset: ha $x - y + 1 = 0$, akkor $y = x + 1$. Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$2\,x\,y + (x - y) + 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2\,x\,(x + 1) + (x - (x + 1)) + 4 = 0$$
$$2\,x^2 + 2\,x - 1 + 4 = 0$$
$$2\,x^2 + 2\,x + 3 = 0$$

E másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív: $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 < 0$, így az egyenletnek nincs valós gyöke. Mivel x valós szám, ezért ebben az esetben nem kapunk megoldást.

A feladat megoldása: $z_1 = 2 - 2\,i$ és $z_2 = -1 + i$.

7. b) $2\,i\,z^3 = (1 + i)^8$

Megoldás. b) Fejezzük ki z^3-t:

- $(1 + i)^2 = 1 + 2\,i + i^2 = 1 + 2\,i - 1 = 2\,i \;\Longrightarrow$
- $(1 + i)^8 = \left((1 + i)^2\right)^4 = (2\,i)^4 = 2^4\,i^4 = 16\,\left(i^2\right)^2 = 16\,(-1)^2 = 16 \;\Longrightarrow$
- $z^3 = \dfrac{(1 + i)^8}{2\,i} = \dfrac{16}{2\,i} = \dfrac{8}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{8\,i}{i^2} = \dfrac{8\,i}{-1} = -8\,i$

Írjuk fel a $-8\,i$-t trigonometrikus alakban: $-8\,i = 8\left(\cos\dfrac{3\,\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\,\pi}{2}\right)$

$$\Longrightarrow\; z_k = \sqrt[3]{-8\,i} = 2\left(\cos\frac{\frac{3\,\pi}{2} + k\cdot 2\,\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\,\pi}{2} + k\cdot 2\,\pi}{3}\right), \text{ ahol } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Az argumentumok: $k = 0 \;\Longrightarrow\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

$k = 1 \;\Longrightarrow\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\,\pi}{3} = \dfrac{7\,\pi}{6}$

$k = 2 \;\Longrightarrow\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4\,\pi}{3} = \dfrac{11\,\pi}{6}$

A gyökök:

Ha $k = 0$: $z_0 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\,(0 + i \cdot 1) = 2\,i$

Ha $k = 1$: $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{7\,\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\,\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3} - i$

Ha $k = 1$: $z_2 = 2\left(\cos\left(\dfrac{11\,\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\,\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - i$

8. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív!

$$\frac{7i+3}{7-3i} z^4 + 8\left(\sqrt{3} + i\right) = 0$$

Megoldás. $\frac{7i+3}{7-3i} = \frac{7i+3}{7-3i} \cdot \frac{7+3i}{7+3i} = \frac{58i}{58} = i$

$\Longrightarrow i z^4 + 8\left(\sqrt{3} + i\right) = 0$

$\Longrightarrow z^4 = \frac{-8\left(\sqrt{3}+i\right)}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-8\left(i\sqrt{3}-1\right)}{-1} = 8\left(-1+\sqrt{3}\, i\right) = 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$\Longrightarrow z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi}{4}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

Az argumentumok: $\frac{\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, ahol k egész.

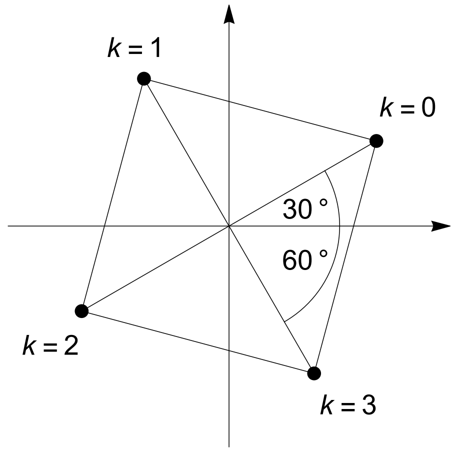
Azokat a gyököket kell meghatároznunk, amelyeknek a valós része pozitív és képzetes része negatív, azaz az argumentum a 4. síknegyedbe esik. A k értéke meghatározható algebrai úton:

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2} < 2\pi \iff \frac{3}{2} < \frac{1}{6} + k\cdot\frac{1}{2} < 2 \iff \frac{4}{3} < \frac{k}{2} < \frac{11}{6} \iff \frac{8}{3} \approx 2.67 < k < \frac{11}{3} \approx 3.67$$

Mivel k egész, ezért innen $k = 3$, az argumentum pedig $\frac{\pi}{6} + 3\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$.

A megoldás: $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$.

Megjegyzés: a k értéke geometriai úton is meghatározható. A z_k gyökök egy olyan négyzet csúcsai, melyben az egyik csúcs argumentuma $\frac{\pi}{6}$ (ha $k = 0$). Az alábbi ábrán látható, hogy az a csúcs esik a 4. síknegyedbe, ahol $k = 3$.



9. Tegyük fel, hogy a z komplex számra teljesül, hogy a z képzetes része nem 0, de a $z+\frac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozza meg z abszolútértékét, $|z|$-t!

Megoldás. Legyen $z = x + y\,i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

$$z+\frac{1}{z} = (x+y\,i)+\frac{1}{x+y\,i} = (x+y\,i)+\frac{1}{x+y\,i}\cdot\frac{x-y\,i}{x-y\,i} =$$

$$= (x+y\,i)+\frac{x-y\,i}{x^2+y^2} = \left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Innen $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right) = x+\frac{x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = y-\frac{y}{x^2+y^2}$.

A feltételből $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = y-\frac{y}{x^2+y^2} = y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$. Mivel $y \neq 0$, ezért innen $1-\frac{1}{x^2+y^2} = 0$ adódik, így z abszolútértéke: $|z| = x^2+y^2 = 1$.

10. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív!

$$i\,z^6 = (7+i)^2+\frac{2-30\,i}{1-i}$$

Megoldás:

Fejezzük ki z^6-t:

- $\frac{2-30\,i}{1-i} = \frac{2-30\,i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{2-30\,i^2+2\,i-30\,i}{1-i^2} = \frac{32-28\,i}{2} = 16-14\,i$
- $(7+i)^2 = 49+14\,i+i^2 = 48+14\,i$

$\Longrightarrow$ $i\,z^6 = 48+14\,i+16-14\,i = 64$

$\Longrightarrow$ $z^6 = \frac{64}{i} = \frac{64\,i}{i^2} = -64\,i$

Írjuk fel a $-64\,i$-t trigonometrikus alakban: $-64\,i = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Longrightarrow$ $z_k = \sqrt[6]{-64\,i} = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{6}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Az argumentumok: $\frac{\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{6} = \frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{3}$, ahol k egész.

Azokat a gyököket kell meghatároznunk, amelyek valós és képzetes része is negatív, azaz az argumentum a 3. síknegyedbe esik. A k értéke meghatározható algebrai úton:

$$\pi < \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \iff 1 < \frac{1}{4} + k \cdot \frac{1}{3} < \frac{3}{2} \iff \frac{3}{4} < \frac{k}{3} < \frac{5}{4} \iff \frac{9}{4} = 2.25 < k < \frac{15}{4} = 3.75$$

Mivel k egész, ezért innen $k = 3$, az argumentum pedig $\frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}$.

A megoldás: $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Megjegyzés: a k értéke geometriai úton is meghatározható. A z_k gyökök egy olyan szabályos hatszög csúcsai, melyben az egyik csúcs argumentuma $\frac{\pi}{4}$ (ha $k = 0$). Az alábbi ábrán látható, hogy az ezzel szemközti csúcs esik a 3. síknegyedbe, ahonnan $k = 3$.