18. feladatsorozat

2011 november 9.

1. Jelölje x, y, z egy $\underline{r}$ térvektor három koordinátáját! Az alábbi leképezések melyike lineáris?
   (a) $\varphi((\underline{r})) = 3xy + 4yz - x + y$.
   (b) $\varphi(\underline{r}) = 5x + 2y + 3z$.
   (c) $\varphi(\underline{r})$ az $\underline{r}$ vektornak az $\underline{a} = [1, 2, 3]$ vektor egyenesére eső merőleges vetülete.
2. Adjuk meg az előző feladatbeli lineáris leképezések mátrixait a $\underline{b}_1 = [0, 2, 1]$, $\underline{b}_2 = [1, 1, 1]$, $\underline{b}_3 = [1, 0, 3]$ bázisra vonatkozóan!
3. Legyen φ egy sík vektorainak valamely rögzített koordinátarendszer origója körüli α szöggel, pozitív irányban történő elforgatása! Irjuk fel φ mátrixát abban az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisban, melynek vektorai az origóból a tengelyek nemnegatív irányába mutató egységvektorok!
4. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti, azonos dimenziójú vektorterek! Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés V_1 egy bázisát V_2 egy bázisába vigye!
5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges F test feletti V_1 és V_2 vektorterek esetén egy $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés akkor és csak akkor izomorfizmus, ha $\varphi(\underline{a}) = \underline{0}_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a} = \underline{0}_1$.
6. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek! Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés esetén $Im\varphi = \varphi(V_1)$ a V_2 vektortér egy altere!