2. feladatsorozat

1. Mutassuk meg, hogy ha egy félcsoportban van jobb oldali és bal oldali neutrális elem, akkor azok egymással egyenlőek. Adjunk példát olyan félcsoportra, amelyben minden elem bal oldali neutrális elem.

2. Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport akkor és csak akkor csoport, ha a művelet invertálható S-en.

3. Mutassuk meg, hogy ha az $f : A \mapsto B$ és $g : B \mapsto A$ egyértelmű leképezésekre teljesül, hogy $f \circ g = id_A$ és $g \circ f = id_B$, akkor f is és g is bijektív leképezések (A-ról B-re, B-röl A-ra) mégpedig úgy, hogy egymás inverzleképezései. Megjegyezzük, hogy tetszőleges $f : A \mapsto B$ és $g : B \mapsto C$ leképezések esetén $f \circ g$ a következőképpen van értelmezve: $f \circ g$ az A-t képezi C-be úgy, hogy minden $a \in A$ esetén $(a)(f \circ g) = ((a)f)g$.

4. Mutassuk meg, hogy bijektív leképezés létesíthető egy halmaz ekvivalencia-relációi és a halmaz osztályozásai között.

5. Mutassuk meg, hogy az egész számok halmazán értelmezett

   "$a \equiv b \quad mod\ m$ akkor és csak akkor, ha a-nak és b-nek az m-mel képezett maradékos osztásánal ugyanazt a maradékot kapjuk (itt m rögzített pozitív egész szám)"

   reláció ekvivalencia-reláció.

6. Mutassuk meg, hogy az egész számok $\mathbb{Z}_m$ módon jelölt mod m maradékosztályainak halmaza az osztályok összeadására és szorzására nézve kommutatív gyűrűt alkot.

7. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben valamely $[k]$ elemnek $(0 \leq k \leq m-1)$ akkor és csak akkor van inverze, ha $(k, m) = 1$, azaz k és m relatív prímek.

8. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_m$ akkor és csak akkor test, ha m prímszám.