NÉV: ______________________ NEPTUN KÓD: ____________

Matematika A1a **Mintateszt2** *2014. május*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz* 3 *pontot ér. Indokolni csak akkor kell, ha a feladat ezt kéri. A választ a keretbe írjuk!*

1. Az alábbi közül melyek halmazelméleti azonosságok?
(1) $B \setminus A = B \cap \overline{A}$,
(2) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$,
(3) $A \cap (A \cup \overline{B}) = A$

(1), (2), (3)

2. Az alábbiak közül melyek logikai azonosságok?
(1) $p \wedge (p \vee q) = q$
(2) $p \wedge p = p$
(3) $\overline{p} \vee p = 0$

(2)

3. Definiálja térbeli vektorok skaláris szorzatának fogalmát!

Valamely $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térbeli vektorok skaláris szorzatán az $\underline{a}b = |\underline{a}|\underline{b}|cos\angle_{\underline{a},\underline{b}}$ valós számot értjük.

4. Definiálja a test fogalmát!

Egy legalább kételemű $(R; +, \cdot)$ gyűrűt testnek nevezünk, ha $(R\backslash\{0\}; \cdot)$ kommutatív csoport.

5. Az alábbi számhalmazok között melyek alkotnak gyűrűt az "+" és "·" műveletre?
(1) A pozitív egész számok halmaza.
(2) Az egész számok halmaza.
(3) A komplex számok halmaza.

(2), (3)

6. Adja meg a $P_1(1, 0, 2)$ pontnak az $x - 2y + 5z + 3 = 0$ egyenletű síktól való távolságát!

A távolság $= \frac{14}{\sqrt{30}}$

7. Mondja ki a Bernoulli-egyenlőtlenséget tartalmazó tételt!

Tetszőleges n pozitív egész szám és tetszőleges $h > -1$ valós szám esetén $(1+h)^n \geq 1+nh$.

8. Oldja meg az $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

A gyökök: -1, i, $-i$

9. Mely állítások helyesek az $a_n = \frac{5n^3+10n+5}{n^3+2n}$ sorozattal kapcsolatban?
(1) Az $[a_n]$ sorozat monoton csökkenő.
(2) Az $[a_n]$ sorozat határértéke 5.
(3) Az $[a_n]$ sorozat hatérértéke $\frac{1}{5}$.

(1), (2)

10. Definiálja egy d távolságfüggvényre nézve M metrikus tér pontjaiból álló sorozat határértékének fogalmát!

> Akkor mondjuk, hogy az M metrikus tér valamely L pontja az M pontjaiból álló $[P_n]$ pontsorozat határértéke, ha L tetszőleges teljes környezetén kivül a $[P_n]$ pontsorozatnak legfeljebb véges sok eleme van.

11. Adja meg az $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2+x}{x^3+2}\cos x$ függvény ∞-ben vett határértékét!

> A határérték $=$ 0

12. Az alábbi függvények közül melyek folytonosak balról az $x_0 = 0$ pontban?
    (1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
    (2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha x=0,} \\ 2^{\frac{1}{x}} & \text{egyébként.} \end{cases}$

> (2)

13. Mondja ki a differenciálszámítás Cauchy-féle középértéktételét!

> Ha az egyváltozós valós f és g függvények folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, differenciálhatóak az (a, b) intervallumon és g deriváltja sehol sem nulla (a, b)-n, akkor van az (a, b) intervallumnak olyan ξ pontja, amelyre $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ teljesül.

14. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
    (1) Az *Arcsinx* függvény az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény egy primitív függvénye.
    (2) Az $ln|x^2-1|$ függvény a $3+\frac{2x}{x^2-1}$ függvény egy primitív függvénye.

> (2)

15. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy egyváltozós valós f függvényre?
    (1) Ha f differenciálható $[a, b]$ minden pontjában, akkor f integrálható $[a, b]$-n
    (2) Ha f korlátos $[a, b]$-n, akkor integrálható is $[a, b]$-n

> (1)

16. Fogalmazza megy az integrálszámítás középértéktételét!

> Ha az egyváltozós valós f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor van az $[a, b]$ intervallunmak olyan c pontja, melyre $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

II. rész. *Ebben a részben egy tételt kell kimondani és bizonyítani. Csak a tétel kimondásáért 1 pont jár.*

Mondja ki és bizonyítsa be a Newton-Leibniz-tételt! (12 *pont*)

Tétel: Ha az egyváltozós valós f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és F a f egy olyan primitív függvénye, amely folytonos $[a, b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$.

Bizonyítás: Mivel f folytonos $[a, b]$-n, ezért ott integrálható is, és az $I(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ függvény az f egy primitív függvénye (a, b)-n. Így van olyan c konstans, hogy

$$I(x) = \int_a^x f(t)\ dt = F(x) + c$$

teljesül minden $x \in (a, b)$ pontra. Ekkor viszont

$$0 = lim_{x \to a+0} I(x) = lim_{x \to a+0} F(x) + c = F(a) + c,$$

és ezért $c = -F(a)$. Továbbá,

$$\int_a^b f(x)\ dx = lim_{x \to b-0} I(x) = lim_{x \to b-0} F(x) - F(a) = F(b) - F(a).$$

OSZTÁLYZATOK: A sikeres vizsgához az első részből legalább 14 pontot, a második részből pedig legalább 4 pontot el kell érni. Ennek teljesülése esetén a vizsgán elért osztályzatot az összpontszám alapján az alábbiak szerint számoljuk ki:

Összpontszám	0 – 17	18 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 60
Osztályzat	1	2	3	4	5

Aki legalább közepes eredményt elér az írásbeli vizsgán úgy, hogy a második részből legalább 6 pontot szerez, szóbeli vizsgával javíthat (ilyenkor a két eredmény átlaga adja a végső osztályzatot).