NÉV: ______________________ NEPTUN KÓD: __________

Matematika A1a **Mintateszt1** *2014. május*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz* 3 *pontot ér. Indokolni csak akkor kell, ha a feladat ezt kéri. A választ a keretbe írjuk!*

1. Az alábbi halmazok közül melyek egyenlőek $A \cap B$-vel?
   (1) $B \setminus A$,
   (2) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,
   (3) $A \setminus \overline{B}$

   (2), (3)

2. Az alábbiak közül melyek logikai azonosságok?
   (1) $p \wedge (p \vee q) = p$
   (2) $1 \wedge p = 1$
   (3) $1 \vee p = 1$

   (1), (3)

3. Definiálja térbeli vektorok lineáris függetlenségének fogalmát!

   Akkor mondjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ térbeli vektorok lineárisan függetlenek, ha lineáris kombinációjuk csak úgy lehet egyenlő a nullvektorral, ha az abban szereplő együtthatók mindegyike 0.

4. Definiálja a gyűrű fogalmát!

   Egy $(R; +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrát gyűrűnek nevezünk, ha az "$+$" művelet asszociatív, invertálható és kommutatív, a "$\cdot$" művelet asszociatív, valamint a "$\cdot$" művelet disztributív mindkét oldalról az "$+$" műveletre.

5. Az alábbi számhalmazok között melyek alkotnak testet az "$+$" és "$\cdot$" műveletre?
   (1) Az egész számok halmaza
   (2) A racionális számok halmaza
   (3) A komplex számok halmaza

   (2), (3)

6. Adja meg az $\frac{x-2}{3} = \frac{2y+4}{2} = -z$ és $x = y = z$ egyenesek távolságát!

   A távolság $= \frac{6}{\sqrt{6}}$

7. Mondja ki a binomiális tételt komplex számokra!

   Tetszőleges u és v komplex számok és tetszőleges nemnegatív egész n esetén $(u+v)^n = \binom{n}{0}u^n + \binom{n}{1}u^{n-1}v + \cdots + \binom{n}{n-1}uv^{n-1} + \binom{n}{n}v^n$.

8. Adja meg a $z = \frac{(2+3i)}{3-4i}$ komplex szám algebrai alakját!

   $z = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$

9. Mely állítások helyesek az $a_n = \sqrt{n^3 + n^2} - \sqrt{n^3}$ sorozattal kapcsolatban?
   (1) Az $[a_n]$ sorozat korlátos.
   (2) Az $[a_n]$ sorozat határértéke 1/2.
   (3) Az $[a_n]$ sorozat hatérértéke 0.

   (1), (3)

10. Mikor mondjuk, hogy az a valós szám határértéke egy $[a_n]$ valós számsorozatnak?

    Akkor mondjuk, hogy az a valós szám egy $[a_n]$ valós számsorozat határértéke, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz megadható olyan n_0 index, hogy minden $n > n_0$ index esetén $|a_n - a| < \epsilon$.

11. Adja meg az $f(x) = \frac{1-cosx}{x}$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli határértékét!

    A határérték = 0

12. Az alábbi függvények közül melyek korlátosak a $[-1, 1]$ intervallumon?
    (1) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha x=0,} \\ \frac{1}{x} & \text{egyébként.} \end{cases}$
    (2) $f(x) = arctgx.$

    (2)

13. Az alábbi függvények közül melyek folytonosak az $x_0 = 0$ pontban?
    (1) $f(x) = ctgx.$
    (2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha x=0,} \\ \frac{sinx}{x} & \text{egyébként.} \end{cases}$

    (2)

14. Definiálja egy $f(x)$ egyválozós valós függvén x_0 pontbeli differenciálhányadosának fogalmát!

    Egy egyváltozós valós $f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosán a $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határértéket értjük, ha létezik.

15. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
    (1) Az $f(x) = |x|$ függvény $x_0 = 0$-ban differenciálható.
    (2) Az $f(x) = x^3 + x^2$ függvénynek $x_0 = 0$-ban maximuma van.
    (3) Az $f(x) = x^3 + x^2$ függvénynek $x_0 = -2/3$-ban maximuma van.

    (3)

16. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
    (1) $\int_0^1 xe^x dx = 2$
    (2) $\int_0^1 xe^x dx = 1$
    (3) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = ln2$

    (2), (3)

II. rész. *Ebben a részben egy tételt kell kimondani és bizonyítani. Csak a tétel kimondásáért 1 pont jár.*

. Mondja ki és bizonyítsa be a Moivre-képletet tartalmazó tételt! (12 *pont*)

Tétel: Tetszőleges $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ komplex szám és tetszőleges n egész szám esetén $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$ ($n \leq 0$ esetén feltesszük, hogy $z \neq 0$).

Bizonyítás: Ha n pozitív, akkor

$$z^n = z \cdot z \cdots z = r(cos\varphi + isin\varphi)r(cos\varphi + isin\varphi) \cdots r(cos\varphi + isin\varphi) = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$$

Mivel $z \neq 0$ esetén $z^0 = 1$ definíció szerint, s mert $r^0(cos0 + isin0) = 1$, ezért az állítás $n = 0$-ra is érvényes.

Tegyük fel, hogy $n = -m$, ahol $m > 0$. Akkor

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{cos0 + isin0}{r^m(cosm\varphi + isinm\varphi)} = r^{(-m)}(cos(-m)\varphi + isin(-m)\varphi) = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$$

OSZTÁLYZATOK: A sikeres vizsgához az első részből legalább 14 pontot, a második részből pedig legalább 4 pontot el kell érni. Ennek teljesülése esetén a vizsgán elért osztályzatot az összpontszám alapján az alábbiak szerint számoljuk ki:

Összpontszám	0 – 17	18 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 60
Osztályzat	1	2	3	4	5

Aki legalább közepes eredményt elér az írásbeli vizsgán úgy, hogy a második részből legalább 6 pontot szerez, szóbeli vizsgával javíthat (ilyenkor a két eredmény átlaga adja a végső osztályzatot).