8. feladatsorozat

1. Mutassa meg, hogy egy R egységelemes integritástartomány tetszőleges a és b eleme esetén $a|b$ és $b|a$ akkor és csak akkor teljesül, ha van R-ben olyan x egység, hogy $a = bx$ (és ekkor $b = ay$ is teljesül R valamely y egységére)!

2. Mutassa meg, hogy tetszőleges test feletti polinomgyűrűben valamely $a(x)$ és $b(x)$ polinomok esetén $a(x)|b(x)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $b(x) \in (a(x))$ (ami azzal ekvivalens, hogy $(b(x)) \subseteq (a(x))$) /emlékeztető: $(f(x))$ jelöli az $f(x)$ polinom által generált un. főideált/.

3. Mutassa meg, hogy tetszőleges test feletti polinomgyűrűben egy $d(x)$ polinom akkor és csak akkor legnagyobb közös osztója az $a(x)$ és $b(x)$ polinomoknak, ha $(\{a(x), b(x)\}) = (d(x))$.

4. Mutassa meg, hogy egy F test feletti polinomgyűrű tetszőleges $a(x), b(x), c(x)$ elemei esetén $(a(x)c(x), b(x)c(x)) = (a(x), b(x))c(x)$.

5. Mutassa meg, hogy egy F test feletti polinomgyűrűben egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis elem, ha prímelem!

6. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^7 - 3x^4 + 6x + 3$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Q}$ test felett.

7. Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszám esetén $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$!

8. Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszám esetén $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$ irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}$ test felett!

9. Mutassa meg, hogy egy egész együtthatós $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0, a_0 \neq 0$) polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett!

10. Mutassa meg, hogy ha az $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom esetén van olyan p prímszám, amely nem osztja a_0-t, de osztja az összes többi egyötthatót, de p^2 nem osztja a_n-et, akkor az $f(x)$ polinom irreducibilis!

11. Bontsa fel az $f(x) = x^7 - 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára először a $\mathbb{Q}$ test, majd a $\mathbb{Z}_7$ test felett!