7. feladatsorozat

1. Határozza meg az $x^5 + 4x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinom $4 \in \mathbb{Z}_7$ elemhez tartozó helyettesítési értékét!

2. Bontsa fel az $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \in \mathbb{R}[x]$ polinomot ($\mathbb{R}$ feletti) irreducibilis polinomok szorzatára!

3. Oldja meg az $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

4. Mutassa meg, hogy ha egy $\mathbb{F}$ test feletti legfeljebb 3-adfokú polinomnak nincs gyöke $\mathbb{F}$-ben, akkor a polinom irreducibilis $\mathbb{F}$ felett!

5. Mutassuk meg, hogy az $x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomnak nincs zérushelye $\mathbb{Z}_2$-ben, a polinom még sem irreducibilis $\mathbb{Z}_2$ felett!

6. Mutassa meg, hogy az $u(x)a(x)+v(x)b(x) = d(x)$ egyenletben ($d(x)$ az $f(x)$ és $g(x)$ tetszőleges legnagyobb közös osztója), ha $a^*(x), b^*(x) \geq 1$ és $a(x) \neq b(x)$, akkor az $u(x)$ és $v(x)$ választható úgy, hogy $u^*(x) < b^*(x)$ és $v^*(x) < a^*(x)$!

7. Egy egységelemes integritástartományban az egységelem osztóit egységeknek nevezzük. Határozza meg egy F test feletti polinomok gyűrűjében az egységeket!

8. Egy R egységelemes integritástartomány valamely a elemét prímelemnek nevezzük, ha $a \neq 0$, a nem egység és ha minden $b, c \in R$ elem esetén $a|bc$-ből $a|b$ vagy $a|c$ következik. Egy $d \in R$ elemet irreducibilis elemnek nevezünk, ha $d \neq 0$, d nem egység és minden $a, b \in R$ esetén a $d = ab$-ből az következik, hogy a vagy b egység. Mutassa meg, hogy egységelemes integritástartományban minden prímelem irreducibilis!

9. Mutassa meg, hogy egy R egységelemes integritástartomány tetszőleges a és b eleme esetén $a|b$ és $b|a$ akkor és csak akkor teljesül, ha van R-ben olyan x egység, hogy $a = bx$ (és ekkor $b = ay$ is teljesül R valamely y egységére)!

10. Mutassa meg, hogy tetszőleges test feletti polinomgyűrűben valamely $a(x)$ és $b(x)$ polinomok esetén $a(x)|b(x)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $b(x) \in (a(x))$ (ami azzal ekvivalens, hogy $(b(x)) \subseteq (a(x))$) /emlékeztető: $(f(x))$ jelöli az $f(x)$ polinom által generált un. főideált/.

11. Mutassa meg, hogy tetszőleges test feletti polinomgyűrűben egy $d(x)$ polinom akkor és csak akkor legnagyobb közös osztója az $a(x)$ és $b(x)$ polinomoknak, ha $(\{a(x), b(x)\}) = (d(x))$.

12. Mutassa meg, hogy egy F test feletti polinomgyűrű tetszőleges $a(x), b(x), c(x)$ elemei esetén $(a(x)c(x), b(x)c(x)) = (a(x), b(x))c(x)$.

13. Mutassa meg, hogy egy F test feletti polinomgyűrűben egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis elem, ha prímelem!

14. Mutassa meg, hogy az $\{a + b\sqrt{5}i \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ komplex számok a $\mathbb{C}$ testnek egy olyan részgyűrűjét alkotják, amely egységelemes integritástartomány! Mutassuk meg, hogy ebben a 3 irreducibilis elem, de nem prímelem.