6. feladatsorozat

1. Adott n pozitív egész szám esetén jelölje $\xi_1, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ a primitív n-edik komplex egységgyököket. Itt $\varphi(n)$ jelöli az n-nél kisebb, az n-hez relatív prím pozitív egész számok számát. A $\Phi_n(x) = \Pi_{i=1}^{\varphi(n)}(x - \xi_i)$ polinomot n-edik körosztási polinomnak nevezzük. Irja fel az n-dik körosztási polinomokat az $n = 1, 2, 3, 4$ esetekre.

2. (Házi feladat; beadási határidő: 2013. október 7.) Írja fel az 5-ödik körosztási polinomot!

3. Határozza meg a $\mathbb{Q}[x]$-beli $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ és $x^2 - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját!

4. Oldja meg az
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$
polinomegyenletet $u(x)$-ra és $v(x)$-re, ahol
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24, \quad g(x) = x^2 - 2x \in \mathbb{Q}[x]$$
és $d(x)$ jelöli $f(x)$ és $g(x)$ legnagyobb közös osztóját!

5. Egy R gyűrű valamely a elemét bal oldali nullosztónak nevezzük, ha van olyan $0 \neq b \in R$ elem, hogy $ab = 0$. A jobb oldali nullosztó fogalma a bal oldali nullosztó fogalmának duálisa. Mutassa meg, hogy ha egy R gyűrűben csak 0 az egyetlen bal oldali [jobb oldali] nullosztó, akkor R-ben nem lehet 0-tól különböző jobb oldali [bal oldali] nullosztó!

6. Egy kommutatív nullosztómentes gyűrűt integritástartománynak nevezünk. Mutassa meg, hogy egy F test feletti polinomok gyűrűje egységelemes integritástartomány!

7. Egy egységelemes integritástartományt Eukilideszi-gyűrűnek nevezünk, ha tetszőleges nem nulla eleméhez hozzá van rendelve egy olyan $\phi(n)$ nem negatív szám, hogy tetsző a és $b \neq 0$ elemek esetén megadhatók olyan q és r elemek, amelyekre $a = bq+r$ teljesü, ahol $r = 0$ vagy $\phi(r) < \phi(b)$. Mutassa meg, hogy minden test feleti polinomgyűrű Euklideszi-gyűrű.

8. (Házi feladat; beadási határidő: 2013. október 7.) Egy R gyűrű H részhalmazát R egy ideáljának nevezzük, ha H az R-beli műveletekre nézve gyűrű, továbbá $rh, hr \in H$ minden $r \in R$ és minden $h \in H$ esetén. Egy $H \subseteq R$ részhalamazt tartalmazó legszűkebb ideált a H által generált ideálnak nevezzük. Jelölése: (H). R egy egyelemű $\{r\}$ részhalamza álta generált ideált főideálnak nevezünk és (r)-rel jeöljük. Egy egységelemes integritástartományt főideálgyűrűnek nevezünk, ha minden ideálja főideál. Mutassa meg, hogy tetszőleges test feletti polinomgyűrű főideálgyűrű.