5. feladatsorozat

1. Adja meg a $\mathbb{Z}_6$ feletti $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ és $g(x) = x^5 + 4x + 2$ polinomok szorzatát!
2. Adja meg $\mathbb{Z}_7$-ben a $\frac{3}{4}$ és $-\frac{5}{6}$ elemeket!
3. Osszuk el maradékosan az $\mathbb{R}$ feletti $x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 2$ polinomot az ($\mathbb{R}$ feletti)

   (a) $x^3 + x + 1$,
   (b) $x - 1$,
   (c) $x^5 + 2$,
   (d) $x^6 - 7x^3 + 2x + 5$

   polinomokkal!
4. Végezzük el a $\mathbb{Z}_6$ gyűrű feletti $a(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ polinomnak a $b(x) = 5x^2 - 4$ polinommal való maradékos osztását!
5. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$-ben:
$$x^6 - x^4 + 2,$$
$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2!$$
6. Határozzuk meg az

   (a) $x^3 - x^2 - 8x + 12$
   (b) $x^3 + 6x^2 + 21x + 52$

   polinomok gyökeit a Cardano képlet segítségével!
7. Adjuk meg a következő komplex polinomok gyöktényezős alakját:
$$x^2 - x + 1,$$
$$x^4 + 1,$$
$$x^n - 1,$$
$$x^n + 1!$$
8. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{F}$ test feletti legalább másodfokú polinom irreducibilis, akkor a polinomnak nincs zérushelye $\mathbb{F}$-ben!
9. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{F}$ test feletti legfeljebb 3-adfokú polinomnak nincs gyöke $\mathbb{F}$-ben, akkor a polinom irreducibilis $\mathbb{F}$ felett!
10. Mutassuk meg, hogy az $x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomnak nincs zérushelye $\mathbb{Z}_2$-ben, a polinom még sem irreducibilis $\mathbb{Z}_2$ felett!
11. Mutassuk meg, hogy $(x - \alpha)^k$ pontosan akkor osztója a $p(x)$ polinomnak, ha $p^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 0, ..., k-1!$ (Itt $p^{(j)}$ jelöli a $p(x)$ polinom j-dik deriváltját.)