3. feladatsorozat

1. Mutassuk meg, hogy az $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) alakú komplex számok kommutatív gyűrűt alkotnak (ezt a gyűrűt a Gauss-egészek gyűrűjének nevezzük).

2. Adjuk meg a
$$\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$$
komplex szám algebrai alakját.

3. Mutassuk meg, hogy
$$cos5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx.$$

4. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az
$$(x + x^{lgx})^5$$
hatvány kifejtésében a második tag értéke 10^6 legyen.

5. Irjunk fel egy olyan komplex együtthatós, másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az
$$z^2 + z + 1 = 0$$
egyenlet komplex gyökeinek 60^0-os elforgatottjai.

6. Mutassuk meg, hogy ha egy valós együtthatós
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$
egyenletnek egy z_0 komplex szám gyöke, akkor gyöke az egyenletnek a z_0 konjugáltja is.

7. Mutassuk meg, hogy minden páratlan fokú valós együtthatós algebrai egyenletnek van legalább egy valós gyöke.