17. feladatsorozat

1. Döntsük el, hogy mi az a másodrendű görbe, melynek egyenlete
$$2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 1 = 0.$$

2. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű mátrix sajátértékeinek összege megegyezik a mátrix nyomával, a sajátértékek szorzata pedig a mátrix determinánsával!

3. Határozza meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)_{3\times 3}$$
mátrix sajátértékeit!

4. Határozza meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_{3\times 3}$$
mátrix sajátértékeit!

5. Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}_{n\times n}$ mátrixszal, ha megadható olyan reguláris $\mathbf{C}_{n\times n}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Mutassuk meg, hogy a hasonlóság az $n \times n$ típusú mátrixok halmazán ekvivalencia-reláció!

6. Adjon meg olyan mátrixot, amely az egységmátrixszal hasonló!

7. Mutassa meg, hogy hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek! Mutasson példát ugyazanazon test feletti, azonos típusú olyan mátrixokra, amelyek sajátértékei megegyeznek (az algebrai multiplicitást is figyelembe véve), de a mátrixok nem hasonlóak egymással!

8. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ egy önadjungált komplex elemű mátrix (itt $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ valós elemű mátrixok), akkor $\mathbf{X}$ szimmetrikus, $\mathbf{Y}$ pedig ferdén szimmetrikus!

9. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 3}.$$
Mutassuk meg,hogy az $\underline{u} = [1, -1, 0]^T$, $\underline{v} = [-2, 3, 4]^T$, $\underline{w} = [-1, -3, 2]^T$ vektorok az $\mathbf{A}$ sajátvektorai. Ezek alapján határozzuk meg $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

10. Hasonlóak-e az alábbi valós elemű mátrixok?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{bmatrix}.$$