13. feladatsorozat

1. Mutassa meg, hogy ha $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ egy $\mathbb{F}$ test feletti n-dimenziós vektortér egy bázisa, $\underline{a}$ pedig olyan vektora, melynek e bázisra vonatkozó i-dik koordinátája nem nulla, akkor az a vektorrendszer, amelyet a bázisból úgy kapunk, hogy $\underline{e}_i$ helyére $\underline{a}$-t írjuk, szintén bázisa a vektortérnek.

2. Adja meg (ha létezik) az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$
mátrix inverzét!

3. Oldja meg az előző feladatot az elemi bázistranszformáció segítségével!

4. A Cramer-szabály alkalmazásával oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert
$$\begin{array}{ccccc} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 3 \\ & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 1 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & = 3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = 5 \end{array}$$

5. Határozza meg a következő mátrix rangját
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -1 \\ 7 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

6. Egyváltozós valós függvények $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ rendreszéről akkor mondjuk, hogy lineárisan független egy I intervallumon, ha az
$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$$
egyenlőségnek minden $x \in I$-re való teljesüléséből
$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$$
következik. Mutassa meg, hogy ha egy $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ függvényrendszer esetén a
$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$
un. Wronski-determináns az I legalább egy pontjában nem nulla, akkor az $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ függvényrendszer lineárisan független az I intervallumon.

7. Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ egy egységelemes kommutatív gyűrű tetszőleges elemei. Mutassa meg, hogy

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \cdots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

8. Mutassa meg, hogy páronként különböző $a_1, \ldots, a_n$ valós számok esetén az $e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}$ függvényrendszer lineárisan független tetszőleges I intervallumon.