**12. feladatsorozat**

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $(2\times 2)$-típusú $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén
$$det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{E} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{AB}\\ -\mathbf{E} & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$
Megjegyzés: A képlet tetszőleges $(n\times n)$-típusú $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén érvényes, de itt csak $(2\times 2)$-típusúra kell bizonyítani.

2. Bontsa fel irreducibilis polinomok szorzatára a $\mathbb{Z}_5$ feletti
$$\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$$
polinomot.

3. Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert $\mathbb{Z}_{11}$-ben és $\mathbb{R}$-ben!
$$\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & =0\\ & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & =1\\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +6x_4 & =3\end{array}$$

4. Az elemi bázistranszformáció alkalmazásával oldjuk meg az előző feladatban szereplő lineáris egyenletrendszert!

5. Mutassuk meg, hogy kommutatív gyűrű feletti azonos típusú négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$
és
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T!$$

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges gyűrű feletti $A$ négyzetes mátrix esetén $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ szimmetrikus, $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ pedig ferdén szimmetrikus! (Egy $\mathbf{B}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{B}=\mathbf{B}^T$; $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{B}=-\mathbf{B}^T$.)

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges test feletti négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként!

8. Bontsuk fel az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 4 & 9 & 9\\ 7 & 3 & 5\end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_1 1)$$
mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére!

9. Mutassuk meg, hogy kommutatív gyűrű feletti azonos típusú $A$ és $B$ mátrixok esetén
$$Spur(AB - BA) = 0.$$

10. Mutassuk meg, hogy kommutatív gyűrű feletti azonos típusú $A$ és $B$ mátrixok esetén
$$AB - BA = E$$
soha nem teljesülhet!

11. Mutassuk meg, hogy egy $F$ test feletti négyzetes nemnulla mátrixok mindegyike zérushelye egy $F$ feletti legalább elsőfokú polinomnak!

12. Milyen mátrix minimálpolinomja elsőfokú?

13. Mutassuk meg a
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & 2 & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^n)^{n-1}$$
egyenlőség teljesülését!