11. feladatsorozat

1. Mutassuk meg, hogy egy egységelemes gyűrű feletti A négyzetes mátrixra $A^{-1} = A^T$ akkor és csak akkor teljesül, ha A minden sorában az elemek négyzetösszege 1, különböző sorok azonos helyen álló elemeinek szorzatösszege pedig 0!

2. Egy $(R; X, \cdot)$ gyűrűt egy F test feletti algebrának nevezünk, ha $(R; +)$ vektortér F felett, és tetszőleges $a, b \in R$ és tetszőleges $\alpha \in F$ esetén $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$ teljesl. Mutassuk meg, hogy ha $(R; +, \cdot)$ egy n-dimenziós nullosztómentes algbera valamely F test felett ($n \in N^+$), akkor R bármely $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázisa és tetszőleges $0 \neq a \in R$ eleme esetén $\{ab_1, \ldots, ab_n\}$ és $\{b_1 a, \ldots, b_n a\}$ is bázis!

3. Mutassuk meg, hogy ha $(R; +, \cdot)$ egy n-dimenziós nullosztómentes algebra valamely F test felett ($n \in N^+$), akkor $(R; +, \cdot)$ ferdetest!

4. Mutassuk meg, hogy ha $(R; +, \cdot)$ egy n-dimenzis nullosztómentes algebra valamely F test felett ($n \in N^+$), akkor R-nek van olyan bázisa, amely tartalmazza az R egységelemét!

5. Mutassuk meg, hogy egy F test feletti $n \times n$-típusú mátrixok gyűrűjében a diagonális mátrixok egy egységelemes kommutatív részgyűrűt alkotnak, amelyben egy elemnek akkor és csak akkor van inverze, ha a főátlója nem tartalmazza F nullelemét.

6. Mutassuk meg, hogy ha egy kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrixban két oszlopot (sort) felcserélünk, akkor a determináns értéke előjelet vált!

7. Oldjuk meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán!
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

8. Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert $\mathbb{Z}_{11}$-ben és $\mathbb{R}$-ben!
$$\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +6x_4 & = 3 \end{array}$$

9. Az elemi bázistranszformáció alkalmazásával oldjuk meg az előző feladatban szereplő lineáris egyenletrendszert!

10. Mutassuk meg, hogy egy $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását úgy is megkaphatjuk, hogy az $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldását!

11. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbb{F}$ test feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorai, tetszőleges $\alpha \in \mathbb{F}$ skalár és tetszőleges $i \neq j$ (pl. $i < j$), $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ indexek esetén

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_k >=< \underline{a}_1, \ldots, (\underline{a}_i + \alpha \underline{a}_j), \ldots, \underline{a}_k >!$$

12. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{F}$ test feletti, m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja r, akkor az egyenletrendszer megoldáshalmaza az $\mathbb{F}^n$ vektortér egy $n-r$-dimenziós altere!

13. Mutassuk meg, hogy minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdénszimmetrikus mátrix összegeként!

14. Bontsuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -4 & -8 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3}$$

mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére!