FÉLCSOPORTOK

NAGY ATTILA

EGYETEMI JEGYZET

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra Tanszék

2011

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a Matematika Alapszak keretén belül "Félcsoportelmélet" címmel tartott szabadon választható tárgyam előadásainak anyagát tartalmazza.

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS **7**

2. A félcsoport és csoport fogalma; félcsoportelméleti alapfogalmak **9**
2.1. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók 11
2.2. Félcsoport részfélcsoportjai 14
2.3. Félcsoport részcsoportjai 16

3. Reguláris félcsoportok, inverz félcsoportok **23**

4. Félcsoport kongruenciái **27**

5. Félcsoport homomorfizmusai **33**
5.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek 34
5.2. Szabad félcsoportok, végesen reprezentálható félcsoportok . . . 36
5.3. Félcsoportok beágyazása csoportokba 36

6. Félcsoport ideáljai, a Green-relációk **43**
6.1. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoport 44
6.2. Félcsoport főfaktorai 47
6.3. A Green-relációk 49

7. Félcsoport transzlációs burka, félcsoportok ideálbővítése **51**
7.1. Félcsoportok transzlációs burka 52
7.2. Félcsoportok ideálbővítése 54

8. Jobb (0-)egyszerű félcsoportok **55**
8.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoportok . . . 56
8.2. Idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportok 63

Szerkesztés alatt

9. (0-)egyszerű félcsoportok **69**
9.1. Croisot-Teissier félcsoportok 70

10. Teljesen (0)-egyszerű félcsoportok **77**
10.1. Rees-mátrix félcsoportok 77
10.2. A Rees-tétel 79

11. Félcsoportok szubdirekt szorzat **81**

12. Félcsoportok félhálója **83**
12.1. **Kötegek** 88

13. Félcsoportalgebrák **93**

14. Félcsoportok mátrixreprezentációi **97**

15. Automataelméleti alkalmazások **99**

Szerkesztés alatt

1. fejezet

BEVEZETÉS

Definíció 1.1 *Valamely $A_1, \ldots, A_n$ nem-üres halmazok Descartes szorzatán az $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \ : \ a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ halmazt értjük.*

Definíció 1.2 *Legyen S tetszőleges nem-üres halmaz. Az $S \times \cdots \times S$ n-szeres Descartes szorzatnak az S halmazba való egyértelmű leképezését az S halmazon értelmezett n-változós műveletnek nevezzük.*

Definíció 1.3 *Algebrai stuktúrán olyan nem-üres A halmazt értünk, amelyen értelmezve van legalább egy művelet. Ennek jelölése: $(A; \Omega)$, ahol Ω jelöli a műveletek halmazát. Az A-t az algebrai struktúra alaphalmazának is szokták nevezni.*

Megjegyzés 1.1 *Például, ha az egész számok halmazára úgy tekintünk, mint egy algebrai stuktúrára (a szokásos összeadásra és szorzásra nézve), akkor ezt $(Z; +, \cdot)$ módon jelöljük.*

Megjegyzés 1.2 *Ebben a jegyzetben műveleten mindig kétváltozós műveletet fogunk érteni. Ha f jelöl egy kétváltozós műveletet, akkor az (a, b) pár f szerinti képét a f b-vel jelöljük. Ha a művelet jele $\cdot$, akkor a műveletet szorzásnak is szoktuk nevezni; ekkor azt is szoktuk mondani, hogy multiplikatív írásmódot használunk. Ilyenkor a "$\cdot$" jelet el is szoktuk hagyni, s az a és b elemek (ebben a sorrendben vett) szorzatát ab módon jelöljük. Ha a művelet jele $+$, akkor a műveletet összeadásnak is szoktuk nevezni; ekkor azt is szoktuk mondani, hogy additív írásmódot használunk. Ha nincs szükség a műveletek jelölésére, akkor az algebrai stuktúrát csak az alaphalmazzal jelöljük. Ezek szerint, ha*

Szerkesztés alatt

egy algebrai struktúra alaphalmaza A, akkor A jelölhet egy halmazt és egy algebrai stuktúrát is.

Megjegyzés 1.3 *Egy műveletet táblázatos formában is megadhatunk. Például, egy $S = \{a, b\}$ alaphalmaz esetén a következő táblázatban*

	a	b
a	b	b
b	b	a

az a-sor b-oszlopának eleme az ab műveleti eredmény; jelen példánkban ez egyenlő b-vel. Egy, a fentieknek megfelelően konstruált táblázatot Cayley-féle művelettáblának nevezünk.

Szerkesztés alatt

2. fejezet

A félcsoport és csoport fogalma; félcsoportelméleti alapfogalmak

Definíció 2.1 *Egy egyműveletes S algebrai struktúrát félcsoportnak nevezünk, ha az S-en értelmezett művelet asszociatív, azaz $a(bc) = (ab)c$ teljesül tetszőleges S-beli a, b, c elemek esetén. Ha emellett még $ab = ba$ is teljesül tetszőleges S-beli a, b elemekre, akkor azt mondjuk, hogy S kommutatív félcsoport.*

Megjegyzés 2.1 *Legyen S olyan véges félcsoport, amelyen a művelet egy Cayley-féle művelettáblával van definiálva. Az S valamely rögzített a eleme esetén S összes x, y elemére az $(xa)y$ műveleti eredményeket beírhatjuk egy táblázatban, amely táblázat x-sora a Cayley-művelettábla xa-sorával egyezik meg. Az $x(ay)$ műveleti eredményeket ugyancsak beírhatjuk egy táblázatban, amely táblázat y-oszlopa a Cayley-művelettábla ay-oszlopával egyezik meg. Nyilvánvaló, hogy valamely $x, y \in S$ elemek esetén $(xa)y = x(ay)$ akkor és csak akkor teljesül, ha az előbb képezett két táblázat mindegyikében az x-sor y-dik eleme ugyanaz. Az S-en értelmezett művelet pedig akkor és csak akkor asszociatív, ha S tetszőleges a eleméhez az előzőekben definiált két táblázatban az azonos helyen álló elemek egymással rendre megegyeznek. Az asszociativitást ellenőrző, az előzőekben részletezett tesztet "Light-féle asszociativitás-tesztnek" nevezzük.*

Tekintsük példaként a következő Cayley-féle művelettáblát:

	a	b
a	b	a
b	b	b

Szerkesztés alatt

Az a elemhez tartozó, az $(xa)y$ elemeket tartalmazó táblázat:

	a	b
a	b	b
b	b	b

Az a elemhez tartozó, az $x(ay)$ elemeket tartalmazó táblázat:

	a	b
a	a	b
b	b	b

Mivel ebben a két táblázatban már van eltérés, ezért a b elemhez tartozó táblázatokat már nem is kell összehasonlítanunk; a Cayley-táblázattal definiált művelet nem asszociatív.

Tétel 2.1 *Egy S félcsoport tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ elemei esetén az elemek valamely sorrendben vett szorzata nem függ attól, hogy a szorzatot milyen zárójelezés mellett számítjuk ki.*

Bizonyítás. A bizonyítást az n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 3$-ra az asszociativitás definíciója miatt igaz az állítás. Legyen $n \geq 4$. Jelölje $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ az S félcsoport tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemeinek ebben a sorrendben vett valamely zárójelezés szerinti szorzatát. Legyen

$$Z^*[a_1, a_2, \ldots, a_n] = ((((a_1a_2)a_3)\ldots)a_{n-1})a_n.$$

Megmutjuk, hogy

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = Z^*[a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re már igaz az állítás. Biztos, hogy van olyan $i = 1, \ldots, n-1$ index, hogy a $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ kifejezésben az a_i és az a_{i+1} elemek (a_ia_{i+1}) formában szerepelnek. Ha ezt a szorzatot S egyetlen elemének tekintjük, akkor a $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ szorzat az S félcsoport legfeljebb $n-1$ elemének szorzataként tekinthető, és ezért $i = 1$ esetén

$$Z(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Z^*[a_1, \ldots, a_n]$$

triviálisan teljesül, $i > 1$ esetén pedig

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = Z^*[a_1 \ldots, (a_ia_{i+1}), \ldots, a_n]$$

Szerkesztés alatt

$$= Z^*[Z * [a_1, \ldots, (a_i a_{i+1})], \ldots, a_n]$$

($i + 1 = n$ esetén az utolsó kifejezés $Z^*[a_1, \ldots, (a_{n-1}a_n)]$ alakú). Mivel (az $i + 1 = n$ esetet is beleértve)

$$Z^*[a_1, \ldots, (a_i a_{i+1})] = Z^*[a_1, \ldots, a_{i-1}](a_i a_{i+1})$$

$$= (Z^*[a_1, \ldots, a_{i-1}]a_i)a_{i+1} = Z^*[a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}],$$

ezért

$$Z^*[Z^*(a_1, \ldots, (a_i a_{i+1})], \ldots, a_n] = Z^*[a_1, \ldots, a_n].$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tétel 2.2 *Tetszőleges S kommutatív félcsoport tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 2$) elemei esetén az elemek szorzata nem függ az elemek sorrendjétől.*

Proof. A bizonyítást az n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük el. $n = 2$ esetén az állítás igaz a kommutativitás definíciója miatt. Legyen $n \geq 3$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$-re. Legyen π az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemek egy permutációja. Legyen $j = \pi(n)$. Ha $j = n$, akkor (az előző tétel jelöléseit használva)

$$Z[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}] = Z^*[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}]$$

$$= (Z^*[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n-1)}])a_n = (Z^*[a_1, \ldots, a_{n-1}])a_n = Z^*[a_1, \ldots, a_n].$$

Ha $j \neq n$, akkor

$$Z[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}] = Z^*[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}]$$

$$= (Z^*[a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(j-1)}, a_{\pi(j+1)}, \ldots, a_{\pi(n)}])a_j,$$

amely szomszédos elemek alkalmas cseréje után egyenő lesz a $Z^*[a_1, \ldots, a_n]$ szorzattal. □

2.1. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók

Definíció 2.2 *Egy S halmazon értelmezett műveletet invertálhatónak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $ax = b$ és $xa = b$ teljesül.*

Szerkesztés alatt

Megjegyzés 2.2 *Világos, hogy az egész számok halmazán az összeadás invertálható, a szorzás viszont nem.*

Definíció 2.3 *Egy félcsoportot csoportnak nevezünk, ha a művelet (az asszociativitás mellett) invertálható. Ha emellett még kommutatív is a művelet, akkor kommutatív csoportról beszélünk.*

Definíció 2.4 *Egy S félcsoport valamely e elemét bal oldali egységelemnek nevezzük, ha S minden s eleme esetén fennáll az $es = s$ egyenlőség. A jobb oldali egységelem fogalma a bal oldali duálisa. Egy elemet egységelemnek nevezünk, ha az bal oldali és egyben jobb oldali egységelem.*

Megjegyzés 2.3 *A definíciókból egyszerűen adódik, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van. Továbbá, ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali egységeleme is, akkor azok egyenlőek, s az S félcsoport egyetlen egységelemét adják. Minden S félcsoporthoz adjungálhatunk egy, az S által nem tartalmazott e elemet, és az $S \cup e$ halmazon definiálhatunk egy műveletet úgy, hogy legyen $es = se = s$ tetszőleges $s \in S \cup e$ esetén, s az S-beli műveletet változatlanul hagyjuk. Az világos, hogy ezzel egy olyan félcsoportot definiáltunk, amelyben e egységelem.*

Jelölés: Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^1 az S félcsoportot, ha S-ben van egységelem, egyébként pedig jelölje azt a félcsoportot, amelyet S-ből egy egységelem adjungálásával nyerünk a fenti megjegyzésben szereplő módon.

Definíció 2.5 *Egy e egységelemes S félcsoport valamely b elemét [c elemét] egy $a \in S$ elem bal oldali [jobb oldali] inverzének nevezzük, ha $ba = e$ [$ac = e$] teljesül. Egy $a^{-1} \in S$ elemről azt mondjuk, hogy az $a \in S$ elem inverze, ha a^{-1} az a elem bal oldali és jobb oldali inverze is.*

Tétel 2.3 *Egységelemes félcsoportban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Továbbá, ha egy a elemnek van jobb oldali és bal oldali inverze is, akkor azok egyenlők, és az a elem egyetlen inverzét adják.*

Bizonyítás.

Tétel 2.4 *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

Szerkesztés alatt

(1) S csoport;

(2) S-nek van olyan e jobb oldali egységeleme, hogy S minden elemének van S-ben e-re vonatkozó jobb oldali inverze, azaz minden $a \in S$ elemhez van olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $aa^{-1} = e$;

(3) S-nek van egységeleme és minden elemének van inverze.

Proof. (1) $\mapsto$ (2): Tegyük fel, hogy S csoport, azaz az S-en értemezett művelet (az asszociativitás mellett) invertálható. Legyen $a \in S$ tetszőleges, rögzített elem. Akkor megadható olyan e elem, amelyre

$$ae = a$$

teljesül. Legyen

$$b \in S$$

tetszőleges elem. Akkor van olyan

$$y \in S$$

elem, hogy

$$ya = b.$$

Ezért

$$be = (ya)e = y(ae) = ya = b,$$

azaz e az S félcsoport jobb oldali egységeleme. Mivel a művelet invertálható, tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy

$$aa^{-1} = e.$$

Theát (2) teljesül.

(2) $\mapsto$ (3): Tegyük fel, hogy az S félcsoportban van olyan e jobb oldali egységelem, hogy S minden elemének van jobb oldali inverze erre a jobb oldali egységelemre nézve. Legyen a tetszőleges S-beli elem. Jelölje a_0 az a-nak, a_1 az a_0-nak egy-egy jobb oldali inverzét az e jobb oldali egységelemre nézve, azaz

$$aa_0 = e = a_0a_1.$$

Akkor

$$a_0a = (a_0a)e = (a_0a)(a_0a_1) = a_0(aa_0)a_1 = a_0ea_1 = a_0a_1 = e,$$

Szerkesztés alatt

tehát a_0 jobb oldali inverze a-nak e-re nézve. Igy

$$ea = (aa_0)a = a(a_0a) = ae = a,$$

tehát e kétoldali egységeleme S-nek. Igy (3) teljesül.

(3) $\mapsto$ (1): Induljunk ki a (2) feltételből. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Akkor az S-beli $x = a^{-1}b$ és $y = ba^{-1}$ elemekre $ax = b$, valamint $ya = b$ teljesül, s így az S-en értelmezett művelet (az asszociativitás mellett) invertálható. Tehát S csoport. □

Megjegyzés 2.4 *Egy csoportot úgy is tekinthetünk, mint egy olyan $(G; \cdot, *)$ kétműveletes algebrai stuktúrát, ahol $\cdot$ asszociatív kétváltozós művelet, $*$ egyváltozós művelet és tetszőleges $x, y \in G$ esetén teljesül az*

$$y^*(yx) = x = (xy^*)y$$

egyenlőség.

2.2. Félcsoport részfélcsoportjai

Definíció 2.6 *Egy S félcsoport valamely nem-üres T részhalmazát az S félcsoport részfélcsoportjának nevezzük, ha T zárt az S-beli műveletre nézve, azaz $ab \in T$ teljesül minden $a, b \in T$ elem esetén. A fenti jelöléssel: $T^2 \subseteq T$.*

Definíció 2.7 *Egy S félcsoport valamely nem-üres G részhalmazát az S félcsoport generátorrendszerének nevezzük, ha S tetszőleges s eleméhez megadhatók G-nek olyan $g_1, \ldots, g_n$ elemei, hogy $s = g_1g_2 \ldots g_n$. Ekkor az $s =< G >$ jelölést használjuk. ha S-nek van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy S végesen generálható. Ha S-nek van egyetlen elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy S ciklikus félcsoport. S egy nem-üres A részhalmaza esetén az A elemeiből képezhető összes $a_1 \ldots a_n$ ($n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$) szorzat az S egy részfélcsoportját alkotja, melyet az A által generált részfélcsoportnak nevezünk és $< A >$ módon jelöljük. Tehát $< A >= \cup_{n=1}^{\infty} A^n$. Az világos, hogy $< A >$ megegyezik az A-t tartalmazó részfélcsoportok metszetével.*

Tétel 2.5 *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges a eleme esetén $< a >$ izomorf vagy a pozitív egész számok additív félcsoportjával, vagy pedig $< a >= \{a, a^2, \ldots, a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$, ahol i az a legkisebb pozitív egész szám, amelyhez*

Szerkesztés alatt

van olyan $i \neq j$, hogy $a^i = a^j$, m pedig az az i-től különböző legkisebb pozitív egész szám, amelyre $a^i = a^m$ teljesül, továbbá $K_a = \{a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$ izomorf az egészek mod m additív csoportjával, $(Z_m; +)$-szal.

Bizonyítás. Legyen a egy S félcsoport tetszőleges eleme. Két eset van.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $a^i = a^j$ akkor és csak akkor teljesül valamely i és j pozitív egész számokra, ha $i = j$. Ekkor a

$$\varphi \ : a^i \ \mapsto \ i$$

az $< a >$ ciklikus félcsoportnak a pozitív egész számok additív félcsoportjára való izomorfizmusa.

A továbbiakban vizsgáljuk azt az esetet, amikor megadhatók olyan $i \neq j$ pozitív egész számok, amelyekre $a^i = a^j$ teljesül. Jelölje a továbbiakban i azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^j$ teljesül valamely $j \neq i$ pozitív egészre. Jelölje továbbá m azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^{i+m}$. Ekkor persze

$$a^{i+km} = a^{i+m}a^{(k-1)m} = a^i a^{(k-1)m} = a^{i+m}a^{(k-2)m} = a^i a^{(k-2)m} = \cdots = a^i,$$

és ezért tetszőleges pozitív egész n esetén megadhatók olyan k és t nemnegatív egészek $(t = 0, \ldots, m-1)$, hogy

$$a^{i+n} = a^{i+km+t} = a^{i+km}a^t = a^{i+t}.$$

Igy $< a >= \{a, a^2, \ldots, a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$ és $K_a = \{a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$ az S félcsoport részfélcsoportja. Jelölje j azt a $0 \leq j \leq m-1$ egész számot, melyre $i + j$ osztható m-mel. Mivel $i, i+1, \ldots i+m-1$ egymást követő m pozitív egész szám, ezért létezik egy és csak egy ilyen j szám. Akkor tetszőleges $a^{i+t} \in K_a$ elemre

$$a^{i+j}a^{i+t} = a^{km}a^{i+t} = a^{i+km+t} = a^{i+t}.$$

Igy a^{i+j} a K_a félcsoport egységeleme. Legyen $a^{i+t} \in K_a$ tetszőleges. Mivel $0 \leq t \leq m-1$, ezért megadható olyan $0 \leq k \leq m-1$ egész szám, hogy $i + t + i + k$ osztható m-mel. Igy $a^{i+t}a^{i+k} = a^{i+j}$. Tehát a^{i+k} az a^{i+t} elem inverze, és így K_a részcsoportja az S félcsoportnak. Az elmondottakból az is következik, hogy

$$\varphi \ : \ a^{i+t} \ \mapsto \ [i+t]$$

izomorfizmusa K_a-nak $(Z_m; +)$-re, ahol $[i+t]$ jelöli Z_m-nek azt az elemét (Z azon kongruencia-osztályát (mod m)), amely tartalmazza ay $i + t$ számot. □

Szerkesztés alatt

2.3. Félcsoport részcsoportjai

Definíció 2.8 *Egy S félcsoport részcsoportján értjük S olyan részfélcsoportját, amely csoport.*

Tétel 2.6 *Egy S félcsoport tetszőleges e idempotense esetén*

$$G_e = \{a \in S : \ a = ae = ea, \ aa' = a'a = e \text{ valamely } a \in S \text{ elemre}\}$$

S-nek olyan részcsoportja, amely tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e egységelem. Minden ilyen G_e maximális részcsoportja S-nek. Továbbá S bármely két különböző maximális részcsoportjának metszete üres.

Bizonyítás. Ha $a, b \in G_e$, akkor $e(ab) = (ab)e = ab$ és $(ab)(b'a') = (b'a')(ab) = e$. Ezért G_e részfélcsoport. Az világos, hogy minden $a \in G_e$ esetén $a" = a'aa' \in Se \cap eS$ és $a"a = e = aa"$. Ezért $a" \in G_e$. Tehát G_e csoport. A definíció alapján világos, hogy G_e tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e az egységelem. Ha $G_e \cap G_f \neq \emptyset$ valamely $e, f \in E_S$ elemekre, akkor tetszőleges $x \in G_e \cap G_f$ elem esetén $e = xx'$ és $f = x"x$ ($x' \in G_e$, $x" \in G_f$), s ezért

$$e = xx' = (fx)x' = f(xx') = fe = (x"x)e = x"(xe) = x"x = f,$$

amiből $G_e = G_f$ következik. Ezért $G_e \cap G_f = \emptyset$, ha $e \neq f$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tétel 2.7 *Tetszőleges S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S részcsoportjainak úniója.*
2. *S diszjunkt részcsoportjainak úniója.*

.

qnoindent **Bizonyítás**.

Bal-, illetve jobb oldali egységelemek

Definíció 2.9 *Egy S félcsoport valamely e elemét az S félcsoport bal [jobb] oldali egységelemének nevezzük, ha $ea = a$ [$ae = a$] teljesül az S tetszőleges a elemére. Azt mondjuk, hogy e az S félcsoport egységeleme, ha e az S bal oldali és egyben jobb oldali egységeleme.*

Szerkesztés alatt

Tétel 2.8 *Ha e bal oldali f pedig jobb oldali egységeleme egy S félcsoportnak, akkor $e = f$. Kóvetkezésképpen, minden félcsoportnak legfeljebb csak egy egységeleme lehet.*

Bizonyítás Ha e bal oldali, f pedig jobb oldali egységeleme egy félcsoportnak, akkor $f = ef = e$. Ebből már következik az is, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van. □

Definíció 2.10 *Egy egységelemes félcsoportot monoidnak is nevezünk.*

Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^1 azt a félcsoportot, amelyet az S félcsoportból úgy származtatunk, hogy ahhoz egy egységelemet adjungálunk, ha S-ben nem volt egységelem, egyébként pedig $S^1 = S$. Az, hogy S-hez egységelemet adjungálunk, azt jelenti, hogy valamely $1 \notin S$ szimbólummal képezzük az $S \cup \{1\}$ halmazt, és ezen azt a műveletet tekintjük, amely az S-beli művelet kiterjesztése oly módon, hogy $s1 = 1s = s$ teljesüljön minden $s \in S \cup \{1\}$ elemre. Például, sokszor célszrűbb, ha az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoport helyett az $\mathcal{F}_X^1$ szabad monoiddal dolgozunk; az $\mathcal{F}_X$-hez adjungált egységelem az üres szó (azaz, az X elemeiből képezett sorozat, amely nem tartalmazza X egyetlen elemét sem).

Biciklikus félcsoport

Definíció 2.11 *Egy S monoidot (jelölje S egységelemét e) biciklikus félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan $\{a, b\}$ kételemű részhalmaza S,nek, amely generálja S-et az $ab = e$ generáló reláció mellett.*

Tétel 2.9 *([?]) Legyenek e, a, b egy S félcsoport olyan elemei, amelyekre $ae = ea = a$, $be = eb = b$, $ab = e$, $ba \neq e$ teljesülnek. Akkor az S félcsoport $\langle a, b\rangle$ részfélcsoportjának minden eleme egyértelműen kifejezhető $b^m a^n$ (m és n nem-negatív egészek) alakban; így $\langle a, b\rangle$ biciklikus félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen □

Zéruselemek

Definíció 2.12 *Egy S félcsoport valamely f elemét az S bal oldali [jobb oldali] nullelemének nevezzük, ha minden S-beli a elem esetén $fa = f$ [$af = f$] teljesül. Egy S félcsoport valamely elemét az S nullelemének nevezzük, ha az illető elem az S-nek bal oldali és jobb oldali nulleleme.*

Szerkesztés alatt

Tetszőleges nem-üres S halmaz esetén, S en értelmezhetjük a kötetkező műveletet: tetszőleges $a, b \in S$ esetén legyen $ab = a$ $[ab = b]$. Világos, hogy ez a művelet asszociatív, azaz S erre a műveletre nézve félcsoport, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem. Egy olyan félcsoportot, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem, balzéró [jobbzéró] félcsoportnak fogunk nevezni.

Lemma 2.1 *Minden félcsoportnak legfeljebb egy nulleleme lehet. Ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali nulleleme, akkor mindegyikből csak egy van, amelyek egybeesenek, s a félcsoport egyetlen nullelemét adják.*

Bizonyítás. Ha e, illetve f egy félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali nullelemei, akkor $e = ef = f$. Ez bizonyítja a lemma minden állítását. □

Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^0 azt a félcsoportot, amely megegyezik S-sel, ha S-nek van nulleleme, ellenkező esetben viszont azt a félcsoportot, melyet S-ből úgy származtatunk, hogy az S halmazt kiegészítjük egy $0 \notin S$ elemmel, s az $S \cup \{0\}$ halmazon úgy értelezünk egy műveletet, hogy a művelet eredménye az S-beli elemek között legyen egyenlő az eredeti S-beli műveleti eredménnyel, viszont tetszőleges $x \in S \cup \{0\}$ elem esetén $x0$ és $0x$ is legyen egyenlő a 0 elemmel. Világos, hogy S^0 olyan félcsoport, amelynek van nulleleme. Az első esetben az eredeti, S-beli nullelem, a második esetben az S-hez adjungált 0 elem.

Tetszőleges S nem-üres halamaz tetszőleges a eleme esetén definuiálhatunk S-en egy $*$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $x, y \in S$ esetén legyen $x * y = a$. Világos, hogy $(S, *)$ egy félcsoport, amelyben a nullelem. Ebben a félcsoportban bármely két elem szorzata a nullelem. Egy ilyen félcsoportot *zéró félcsoportnak* nevezünk.

An element s of a semigroup S with zero is called a *left (right) divisor of zero* if there is an element $x \neq 0$ in S such that $sx = 0$ $(xs = 0)$. An element is called a *divisor of zero* if it is a left divisor or a right divisor of zero.

Definíció 2.13 *Egy 0-elemes S félcsoportot níl félcsoportnak nevezünk ha minden a eleméhez megadható olyan n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 0$ teljesül. Egy S félcsoportot nilpotens félcsoportnak nevezünk, ha $S^n = \{0\}$ teljesül valamely n pozitív egész számra.*

Minden nilpotens félcsoport nil, de a fordított állítás általában nem igaz. Viszont érvényes a következő.

Szerkesztés alatt

Lemma 2.2 *Minden véges níl félcsoport nílpotens.*

Bizonyítás. Legyen S véges níl félcsoport. Az S végesége miatt megadható olyan n pozitív egész szám, hogy S jobb oldali ideáljainak bármely szigorúan csökkenő lánca nem hosszabb n-nél. Legyenek

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in S$$

tetszőleges elemek. Az

$$a_1S^1 \supseteq a_1a_2S^1 \supseteq \cdots \supseteq a_1 \cdots a_nS^1 \supseteq a_1 \cdots a_na_{n+1}S^1$$

lánc hossza $n+1$, ezért

$$a_1 \cdots a_nS^1 = a_1 \cdots a_na_{n+1}S^1.$$

Így megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots a_na_{n+1}x$$

teljesül. Ebből

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots a_n(a_{n+1}x)^k$$

következik minden k pozitív egész számra. Mivel S níl félcsoport, ezért

$$(a_{n+1}x)^t = 0$$

valamely t pozitív egész számra, amiből

$$a_1 \cdots a_n = 0$$

adódik. Tehát

$$S^n = \{0\},$$

azaz, S nílpotens félcsoport. □

Idempotens elem

Definíció 2.14 *Egy S félcsoport valamely e elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $e^2 = e$.*

Szerkesztés alatt

Egy S félcsoport idempotens elemeinek E_S halmazán az $e \leq f$ akkor és csak akkor ha $ef = fe = e$ reláció parciális rendezés. Ha valamely $e, f \in E_S$ elemekre $e \leq f$, de $e \neq f$, akkor ezt $e < f$ módon jelöljük. Az világos, hogy ha egy S félcsoportnak van 0 nulleleme, akkor $0 \leq e$ teljesül minden $e \in E_S$ elemre. Egy S félcsoport valamely $f \neq 0$ idempotens elemét primitív idempotens elemnek nevezzük, ha az $e \leq f$ feltétel valamely $e \in E_S$ idempotens elemre akkor és csak akkor teljesülhet, ha $e = 0$ vagy $e = f$.

Definíció 2.15 *Egy olyan félcsoportot, amelyben minden elem idempotens, kötegnek nevezünk.*

Definíció 2.16 *Egy kommutatív köteget félhálónak nevezünk. Egy olyan köteget, amelyben teljesül az $aba = a$ azonosság, derékszögű kötegnek nevezünk. Egy kötegről azt mondjuk, hogy bal [jobb] normális köteg, ha teljesül benne az $axy = ayx$ [$xya = yxa$] azonosság. Egy olyan köteget, amelyben az $axya = ayxa$ azonosság teljesül, normális kötegnek nevezünk. Akkor mondjuk, hogy egy köteg bal [jobb] reguláris köteg , ha teljesül benne az $axa = ax$ [$axa = xa$] azonosság.*

Tétel 2.10 *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S egy derékszögű köteg.*
2. *S egy bal zéró és egy jobb zéró félcsoportnak a direkt szorzata.*

Egyszerűsíthetőség és szeparativitás

Definíció 2.17 *Egy S félcsoport valamely a elemét bal [jobb] egyszerűsíthetőnek nevezzük, ha minden $x \in S$ elem esetén az $ax = ay$ [$xa = ya$] feltételből $x = y$ következik. Ha egy félcsoport minden eleme bal [jobb] egyszerűsíthető, akkor a félcsoportot bal [jobb] egyszerűsítéses félcsoportnak nevezzük. Ha egy félcsoport bal egyszerűsítéses is és jobb egyszerűsítéses is, akkor egyszerűsítéses félcsoportnak nevezzük. Ha egy félcsoport tetszőleges a, b, x elemei esetén az $ax = bx$ és $xa = xb$ feltételek együttes teljesüléséből $a = b$ következik, akkor a félcsoportot gyengén egyszerűsítéses félcsoportnak nevezzük.*

Definíció 2.18 *Egy S félcsoportról azt mondjuk, hogy bal [jobb] szeparatív , ha az $ab = a^2$ és $ba = b^2$ [$ab = b^2$ és $ba = a^2$] feltételekből $a = b$ következik*

Szerkesztés alatt

minden $a, b \in S$ elemre. Egy olyan félcsoportot, amely bal szepartív és egyben jobb szeparatív is, szeparatív félcsoportnak nevezünk. Egy S félcsoportot gyengén szeparatív félcsoportnak nevezünk, ha $a^2 = ab = b^2$ az $a = b$ teljesülését eredményezi tetszőleges $a, b \in S$ elemekre.

Világos, hogy minden bal [jobb, gyengén] egyszerűsítéses félcsoport bal [jobb, gyengén] szeparatív.

Félcsoport ideáljai

Definíció 2.19 *Egy S félcsoport valamely nem-üres I részhalmazát bal oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in I$ elem esetén $sa \in I$, azaz $SI \subseteq I$; a jobb ideál fogalma a bal oldali ideál fogalmának duálisa. Ha I jobb oldali és bal oldali ideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja, vagy röviden ideálja S-nek.*

Definíció 2.20 *Az S félcsoport valamely nem-üres A részhalmazát tartalmazó bal oldali ideálok metszetét az A által generált bal oldali ideálnak nevezzük. Ha $A = \{a\}$, akkor az a elem által generált fő bal oldali ideálról beszélünk, amelyet $L(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $L(a) = a \cup Sa = S^1a$. Ennek duálisa az a elem által generált fő jobb oldali ideál , amelyet $R(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $R(a) = a \cup aS = aS^1$. Az a elem által generált főideált $J(a)$-val jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy $J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS = S^1aS^1$.*

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

3. fejezet

Reguláris félcsoportok, inverz félcsoportok

Definíció 3.1 *Egy S félcsoport valamely a elemét reguláris elemnek nevezzük, ha van az S félcsoportnak olyan x eleme, hogy $axa = a$ teljesül. Ha egy félcsoprt minden eleme reguláris, akkor a félcsoportot reguláris félcsoportnak nevezzük.*

Lemma 3.1 *Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemeire, akkor ax és xa idempotens elemek.*

Bizonyítás. Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemére, akkor $(ax)^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax$ és $(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa$.

Tétel 3.1 *Egy S félcsoport valamely a eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az S félcsoport a eleme által generált fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható, azaz megadhatók olyan e és f idempotens elemek, hogy $S^1a = Se$ és $aS^1 = fS$.*

Bizonyítás. Ha a reguláris elem, akkor S valamely x elemére $axa = a$ teljesül. Legyen $e = xa$. Lemma ? szerint e idempotens eleme S-nek. Nyilvánvaló, hogy $S^1a = Se$. Hasonlóan adódik, hogy az $f = ax$ idempotens elemre, $aS^1 = fS$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $S^1a = Se$ teljesül az S félcsoport valamely a eleme és valamely e idempotens eleme esetén. Akkor vannak S^1-nek olyan x és y elemei, hogy $a = xe$ és $e = ya$ teljesül. Ekkor $ae = xe^e = xe = a$ és így

Szerkesztés alatt

$a = ae = aya$, azaz a reguláris elem (ha $y = 1$, akkor a idempotens elem és ezért $a = aaa$).

Definíció 3.2 *Egy S félcsoport valamely a elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha megadható olyan S-beli x elem, amelyre $axa = a$ és $ax = xa$ teljesül. Egy S félcsoportot teljesen reguláris félcsoportnak nevezünk, ha S minden eleme teljesen reguláris.*

Tétel 3.2 *Egy S félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha S előáll részcsoportjainak úniójaként.*

Bizonyítás.

Definíció 3.3 *Egy S félcsoport a és b elemeiről azt mondjuk, hogy egymás inverzei, ha $aba = a$ és $bab = b$.*

Lemma 3.2 *Ha a egy S félcsoport reguláris eleme, akkor a-nak van S-ben legalább egy inverze.*

Bizonyítás. Ha a reguláris eleme egy S félcsoportnak, akkor van S-nek olyan x eleme, hogy $axa = a$. Legyen $b = xax$. Akkor $aba = a(xax)a = (axa)(xa) = axa = a$ és $bab = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = b$.

Lemma 3.3 *Ha e, f, ef, fe egy S félcsoport idempotens elemei, akkor ef és fe egymás inverzei.*

Bizonyítás. $(ef)(fe)(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef$. Hasonlóan igazolható, hogy $(fe)(ef)(fe) = fe$.

Definíció 3.4 *Egy S félcsoportot inverz félcsoportnak nevezünk, ha minden elemének van egy és csak egy inverze.*

Tétel 3.3 *Tetszőleges S félcsoport esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S reguláris és idempotens elemei egymással felcserélhetőek.

(2) S minden fő jobb ideálja és minden fő bal ideálja egyetlen idempotens elemmel generálható.

(3) S inverz félcsoport.

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. (1) implikálja (2)-t: A ? Tétel miatt S minden fő bal oldali és jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható. Tegyük fel, hogy $Se = Sf$ teljesül valalmely S-beli e és f idempotens elemekre. Akkor $e = fe = ef = f$. Hasonló módon bizonyítható az állítás a fő jobb oldali ideálokra.

(2) implikálja (3)-at: A ? Tétel miatt ekkor S reguláris. Legyenek b és c inverzei a-nak ($a, b, c \in S$). Akkor $aba = a$, $bab = b$, $aca = a$, $cac = c$. Ekkor $Sba = Sa = Sca$ és $abS = aS = acS$. A ? Tétel miatt $ba = ca$ és $ab = ac$, mivel ba, ca, ab, ac idempotens elemek. Ebből pedig $b = bab = bac = cac = c$ következik.

(3) im plikálja (1)-et: Mivel egy inverz félcsoport reguláris, ezért csak azt kell megmutatni, hogy bármely két idempotens elem felcserélhető. Legyenek e és f az S félcsoport tetszőleges idempotens elemei. Először megmutatjuk, hogy ha e és f idempotens elemei S-nek, akkor ef is idempotens elem. Legyen A egy inverze ef-nek. Akkor $(ef)a(ef) = ef$ és $a(ef)a = a$. Legyen $b = ae$. Akkor $(ef)b(ef) = (ef)a(eef) = (ef)a(ef) = ef$ és $b(ef)b = (ae)(ef)(ae) = (aefa)e = ae = b$. Ezért b inverze ef-nek. Ekkor viszont $ae = a$, mivel ef-nek csak egy inverze lehet. Hasonlóan igazolható, hogy $fa = a$. Ezért $a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a$, azaz a idempotens elem. Mivel idempotens elem önmagának inverze, ezért $a = ef$, azaz ef idempotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy fe is idempotens eleme. Akkor viszont a ? Lemma miatt fe az ef inverze. Mivel ef idempotens, ezért ef önmagának is inverze, amiből $ef = fe$ következik.

Definíció 3.5 *Egy X halmaz α kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációján X egy Y részhalmazának egy $Y' = X\alpha$ részhalmazra való bijekcióját értjük. Az α inverzét a szokásos módon értelnez"uk, és α^{-1}-gyel jelöljük, azaz $(y')\alpha^{-1} = y$ akkor és csak akkor, ha $(y)\alpha = y'$ ($y \in Y, y' \in Y'$).*

Jelölje $\mathcal{T}_X$ az X összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak halmazát, beleértve az X üres részhalmazának önmagára való leképezését, amelyet 0-val jelölünk és üres transzformációnak nevezük. A $\mathcal{T}_X$ halmazon definiálunk egy műveletet a következőképpen. Legyenek $\alpha, \beta \in calT_X$ tetszőleges transzformációk. Legyen Y az α, Z pedig a β értelmezési tartománya. Ha $(Y)\alpha \cap Z = \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta = 0$. Ha $(Y)\alpha \cap Z \neq \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta$ $\mathcal{T}_X$-nek az az eleme, amelynek értelmezési tartománya $((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ és minden $v \in ((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ esetén legyen $(v)\alpha\beta = ((v)\alpha)\beta$.

Lemma 3.4 *Tetszőleges X halmaz esetén $\mathcal{T}_X$ inverz félcsoportot alkot a fent definiált műveletre nézve.*

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Az asszociativitás teljesülése nyilvánvaló, ezért $\mathcal{T}_X$ félcsoport. Mivel minden $\alpha \in \mathcal{T}_X$ esetén $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$ (és $\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$), ezért $\mathcal{T}_X$ reguláris félcsoport. Legyen α tetszőleges idempotens eleme $\mathcal{T}_X$-nek. Legyen Y az α értelmezési tartománya. Mivel α^2 értelmezési tartománya $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1}$, ezért $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1} = Y$, amiből $Y \cap Y\alpha = Y\alpha$, s ebből pedig $Y\alpha \subseteq Y$ következik. Legyen $a \in Y\alpha$ tetszőleges elem. Akkor $a = b\alpha$ $(b \in Y)$, s ezért $a\alpha = b\alpha\alpha = b\alpha = a$, azaz α identikusan hat $Y\alpha$-n. Ebből az is következik, hogy $Y = Y\alpha$. Tehát $\mathcal{T}_X$ valamely eleme akkor és csak akkor idempotens elem, ha identikusan hat X valamely részhalmazán. Ezért az idempotens elemek egymással felcserélhetőek. Ebből viszont az adódik, hogy $\mathcal{T}_X$ inverz félcsoport.

Definíció 3.6 *A $\mathcal{T}_X$ félcsoportot az X halmaz feletti szimmetrikus inverz félcsoportnak nevezünk.*

Tétel 3.4 *Minden S inverz félcsoport izomorf az S feletti szimmetrikus inverz félcsoport egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S inverz félcsoport. Minden $a \in S$ elemhez rendeljük hozzá $Sa^{-1} = Saa^{-1}$-nek $Sa = Sa^{-1}a$-ra való $\varrho_a : x \mapsto xa$ leképezését. Nyilvánvaló, hogy $\varrho_{a^{-1}}$ Sa-t képezi le Sa^{-1}-re. Legyenek $x \in Sa^{-1}$ és $y \in Sa$ tetszőleges elemek. Akkor $xaa^{-1} = x$ és $ya^{-1}a = y$. Ezért

$$(x)\varrho_a\varrho_{a^{-1}} = xaa^{-1} = x$$

és

$$(y)\varrho_{a^{-1}}\varrho_a = ya^{-1}a = y,$$

amiből következik, hogy ϱ_a és $\varrho_{a^{-1}}$ egymás inverzei $\mathcal{T}_S$-ben, azaz $\varrho_a^{-1} = \varrho_{a^{-1}}$. Megmutatjuk, hogy az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetés izomorfizmus. Először megmutatjuk, hogy a megfeleltetés injektív. Tegyük fel, hogy $\varrho_a = \varrho_b$, $(a, b \in S)$. Akkor $Saa^{-1} = Sbb^{-1}$, s ezért $aa^{-1} = bb^{-1}$. Ha $x \in Saa^{-1}$, akkor $xa = (x)\varrho_a = (x)\varrho_b = xb$. Mivel $a^{-1} \in Saa^{-1}$, ezért $a^{-1}a = a^{-1}b$. Ekkor viszont

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Végül megmutatjuk, hogy a megfeleltetés művelettartó, azaz $\varrho_a\varrho_b = \varrho_{ab}$. A ϱ_{ab} értelmezési tartománya $S(ab)(ab)^{-1}$. A $\varrho_a\varrho_b$ értelmezési tartománya $(Sa \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}} = (Sabb^{-1})a = Sa^{-1}abb^{-1}a^{-1} = S(ab)(ab)^{-1}$. Mivel minden $x \in S$ elemre $(x)\varrho_{ab} = x(ab) = (xa)b = (x)(\varrho_a\varrho_b)$, ezért a megfeleltetés művelettartó.

Szerkesztés alatt

4. fejezet

Félcsoport kongruenciái

Definíció 4.1 *Egy $X \neq \emptyset$ halmazon értelmezett (binér) reláción az $X \times X$ halmaz egy részhalmazát értjük. Az (x, x) párok halmazát ($x \in X$) az X identikus relációjának nevezzük, és ι-val fogjuk jelölni. A teljes $X \times X$ halmazt az X halmaz univerzális relációjának nevezzük, és ω-val fogjuk jelölni.*

Definíció 4.2 *Az X halmaz tetszőlges α és β relációi esetén azt mondjuk, hogy α része β-nak (jel.: $\alpha \subseteq \beta$), ha mint az $X \times X$ halmaz részhalmazai között fenáll a megfelelő tartalmazás, azaz az $(a, b) \in \alpha$ feltételből $(a, b) \in \beta$ következik.*

Megjegyzés 4.1 *Két reláció akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha mindegyik tartalmazza a másikat.*

Definíció 4.3 *Legyenek α és β egy X halmaz tetszőleges relációi. Jelölje $\alpha \circ \beta$ a következő relációt:*

$$\alpha \circ \beta = \{(a, b) \in X \times X : \text{ van olyan } c \in X \text{ elem, hogy } (a, c) \in \alpha,\ (c, b) \in \beta\}.$$

Ezt a relációt az α és β relációk kompozíciójának nevezzük.

Tétel 4.1 *Tetszőleges X halmazon értelmezett összes (binér) reláció $\mathcal{B}_X$ halmaza a relációk kompozíciójára nézve félcsoportot alkot.*

Proof. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}_X$ tetszőlegesek. Ha

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$$

Szerkesztés alatt

valamely $a, b \in X$ elemekre, akkor van olyan $x \in X$ elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \circ \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor, alkalmas $y \in X$ elemre,

$$(a, y) \in \alpha,\ (y, x) \in \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor viszont

$$(a, y) \in \alpha \quad \text{és}(y, b) \in \beta \circ \gamma$$

miatt

$$(a, b) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Igy

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás is. Igy

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

□

Definíció 4.4 *Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{B}_X$ reláció esetén legyen $\alpha^{-1} = \{(a, b) \in X \times X :\ (b, a) \in \alpha\}$.*

Lemma 4.1 $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$ *tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ esetén.*

Proof. Legyen

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta)^{-1}.$$

Akkor

$$(b, a) \in \alpha \circ \beta,$$

és ezért valamely $x \in X$ elemre

$$(b, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, a) \in \beta.$$

Igy

$$(a, x) \in \beta^{-1} \quad \text{és} \quad (x, b) \in \alpha^{-1}$$

és ezért

$$(a, b) \in \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}.$$

Tehát

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}.$$

Hasonlóan bizonyítható a fordított tartalmazás is. □

Szerkesztés alatt

Megjegyzés 4.2 *Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ esetén $\alpha \subseteq \beta$ maga után vonja $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ teljesülését.*

Definíció 4.5 *Egy X halmazon értelmezett α relációról azt mondjuk, hogy reflexív, ha $\iota \subseteq \alpha$. Azt mondjuk, hogy szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Azt mondjuk, hogy tranzitív, ha $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.*

Megjegyzés 4.3 *Ha α szimmetrikus reláció, akkor $\alpha = \alpha^{-1}$, mert az $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ tartalmazásból $\alpha^{-1} \subseteq (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ következik.*

Lemma 4.2 *Ha α és β egy X halmazon értelmezett reflexív relációk, akkor akkor $\alpha \circ \beta$ is reflexív reláció X-en.*

Proof. Ha $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ reflexív, akkor minden $(a, b) \in \alpha$ esetén

$$(a, b) \in \alpha \quad (b, b) \in \beta,$$

és ezért

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta.$$

Tehát

$$\alpha \in \alpha \circ \beta,$$

és így

$$\iota \subseteq \alpha \subseteq \alpha \circ \beta.$$

□

Lemma 4.3 *Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ szimmetrikus relációk esetén $\alpha \circ \beta$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Proof. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ szimmetrikus relációk.

Először tegyük fel, hogy

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. Akkor

$$\alpha \circ \beta = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = (\beta \circ \alpha)^{-1} = (\alpha \circ \beta)^{-1}$$

miatt $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus. Akkor

$$\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = (\beta)^{-1} \circ (\alpha)^{-1} = \beta \circ \alpha.$$

Szerkesztés alatt

Definíció 4.6 *Az X halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük.*

Tétel 4.2 *Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ ekvivalenciarelációk esetén $\alpha \circ \beta$ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Proof. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ olyan ekvivalenciarelációk, amelyekre

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. Akkor $\alpha \circ \beta$ reflexív ás szimmetrikus (lásd Lemma ? és Lemma ?). Mivel

$$(\alpha \circ \beta)^2 = (\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta)$$
$$= \alpha \circ (\beta \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\alpha \circ \beta) \circ \beta$$
$$= (\alpha \circ \alpha) \circ (\beta \circ \beta) = \alpha \circ \beta,$$

ezért $\alpha \circ \beta$ tranzitív is. Igy $\alpha \circ \beta$ ekvivalenciareláció.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \circ \beta$ ekvivalencia/reláció. Akkor

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

(lásd Lemma ?). □

Definíció 4.7 *Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját bal kongruenciának nevezzk, ha S tetszőleges a, b, s elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$ feltételből $(sa, sb) \in \sigma$ következik. A jobb kongruencia fogalma a balkongruencia fogalmának duálisa.*

Definíció 4.8 *Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját kongruenciának nevezzk, ha S tetszőleges a, b, c, d elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$, $(c, d) \in \sigma$ feltételekből $(ac, bd) \in \sigma$ következik.*

Lemma 4.4 *Egy S félcsoport valamely ekvivalenciarelációja akkor és csak akkor kongruencia, ha az balkongruencia és egyben jobbkongruencia.*

Bizonyítás. Legyen σ egy S félcsoport valamely ekvivalenciarelációja. Ha σ kongruencia és $(a, b) \in \sigma$, $(a, b \in S)$, akkor tetszőleges S-beli c elem esetén (mivel $(c, c) \in \sigma$) következik, hogy

$$(ca, cb) \in \sigma$$

Szerkesztés alatt

és

$$(ac, bc) \in \sigma.$$

Fordítva, ha σ balkongruencia és jobbkongruencia, akkor tetszőleges S-beli a, b, c, d eleleme esetén az $(a, b) \in \sigma$, $(c, d) \in \sigma$ feltételekbő

$$(ac, bc) \in \sigma$$

és

$$(bc, bd) \in \sigma$$

következik. Mivel σ tranzitív, ezért

$$(ac, bd) \in \sigma.$$

Megjegyzés 4.4 *Egy S félcsoport kongruenciáinak $\mathcal{L}(S)$ halmaza a relációk tartalmazására, mint parciális rendezésre nézve háló. Ebben a hálóban az identikus reláció a legkisebb elem, az univerzális reláció a legnagyobb elem.*

Tétel 4.3 *Legyen σ egy S félcsoport kongruenciarelációja. Akkor a σ-osztályok S/σ faktorhalmaza a σ-osztályok $[a]_\sigma[b]_\sigma = [ab]_\sigma$ módin definiált szorzására nézve félcsoportot alkot.*

Proof. Mivel

$$\begin{aligned}([a]_\sigma[b]_\sigma)[c]_\sigma &= [ab]_\sigma[c]_\sigma \\ = [(ab)c]_\sigma &= [a(bc)]_\sigma = [a]_\sigma[bc]_\sigma \\ &= [a]_\sigma([b]_\sigma[c]_\sigma),\end{aligned}$$

ezért a tétel állítása bizonyított. □

Definíció 4.9 *Az előző tételben szereplő félcsoportot az S félcsoport σ kongruencia szerinti faktorfélcsoportjának nevezzük.*

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

5. fejezet

Félcsoport homomorfizmusai

Definíció 5.1 *Egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való ϕ leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha S tetszőleges a és b elemei esetén $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Ha ϕ szürjektív, akkor azt is szoktuk mondani, hogy T az S félcsoport homomorf képe. Ha pedig ϕ injektív, akkor azt mondjuk, hogy ϕ izomorfizmus, vagy ϕ beágyazása S-nek T-be. Ha ϕ bijektív, akkor azt mondjuk, hogy ϕ az S-nek T-re való izomorfizmusa; ekkor azt is mondjuk, hogy S és T egymással izomorfak. Egy félcsoport önmagába való homomorfizmusait a félcsoport endomorfizmusainak, önmagára való izomorfizmusait pedig a félcsoport automorfizmusainak nevezzük. Egy S félcsoport endomorfizmusai a leképezések kompozíciójára nézve félcsoportot alkotnak, melyben az egységek csoportja az S automorfizmusainak csoportja.*

Megjegyzés 5.1 *Ha σ egy S félcsoport kongruenciarelációja, akkor a $\varphi : s \mapsto [s]_\sigma$ $(s \in S)$ az S félcsoportnak az S/σ faktorfélcsoportra való homomorfizmusa. Ezt a homomorfizmust természetes (vagy kanonikus) homomorfizmusnak nevezzük.*

Lemma 5.1 *Legyen φ egy S félcsoportnak valamely T félcsoportba való homomorfizmusa. Akkor $ker_\varphi = \{(a,b) \in S \times S : \ \varphi(a) = \varphi(b)\}$ S félcsoport kongruenciája.*

Proof. Az világos, hogy $\ker_\varphi$ ekvivalenciareláció. Mivel tetszőleges $a, b, s \in S$ elemekre az $(a,b) \ker_\varphi$ feltételből

$$\varphi(sa) = \varphi(S)\varphi(a) = \varphi(s)\varphi(b) = \varphi(sb)$$

Szerkesztés alatt

következik, ezért ker_φ balkongruencia S-en. Hasonlóan bizonyítható, hogy ker_φ jobbkongruencia S-en. □

Definíció 5.2 *Ha φ egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való homomorfizmusa, akkor az S félcsoport ker_φ kongruenciáját a φ homomorfizmus magjának nevezzük.*

Megjegyzés 5.2 *Ha σ az S félcsoport egy kongruenciája és φ S-nek az S/σ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa, akkor $ker_\varphi = \sigma$*

5.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek

Tétel 5.1 *(Homomorfizmustétel) Ha φ az S félcsoportnak egy T félcsoportra való (szürjektív) homomorfizmusa, akkor $T \cong S/ker_\varphi$.*

Proof. Tetszőleges $\varphi(a) \in T$ esetén, legyen

$$\Phi(\varphi(a)) = [a]_{\ker_\varphi}.$$

Φ T-nek S/ker_φ-ra való egyértelmű leképezése. Ha $\Phi(\varphi(a)) = \Phi(\varphi(b))$ $(a, b \in S)$, akkor

$$[a]_{\ker_\varphi} = [b]_{\ker_\varphi},$$

azaz

$$(a, b) \in ker_\varphi,$$

és ezért

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Tehát Φ injektív (és így bijektív). Mivel

$$\Phi(\varphi(a)\varphi(b)) = \Phi(\varphi(ab)) = [ab]_{\ker_\varphi} = [a]_{\ker_\varphi}[b]_{\ker_\varphi} = \Phi(\varphi(a))\Phi(\varphi(b)),$$

ezért Φ homomorfizmus. Tehát Φ a T félcsoportnak az S/ker_φ faktorfélcsoportra való izomorfizmusa. □

Megjegyzés 5.3 *Az előző tétel alapján kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van egy S félcsoport kongruenciái és nem-izomorf homomorf képei között.*

Szerkesztés alatt

Lemma 5.2 *Legyen S tetszőleges félcsoport és H az S-nek egy részfélcsoportja. Akkor S tetszőleges σ kongruenciája esetén*

$$[H]_\sigma = \{s \in S : \ (\exists h \in H) \ (s, h) \in \sigma\}$$

az S félcsoport részfélcsoportja.

Bizonyítás. Ha $s_1, s_2 \in [H]_\sigma$, akkor

$$(s_1, h_1), (s_2, h_2) \in \sigma$$

alkalmas $h_1, h_2 \in H$ elemekkel. Mivel

$$h_1 h_2 \in H$$

és

$$s_1 s_2, h_1 h_2) \in \sigma,$$

ezért $[H]_\sigma$ részfélcsoportja S-nek. □

Legyen σ egy S félcsoport kongruenciája. Legyen X az S egy nem-üres részhalmaza. Jelölje $\sigma|_X$ a sigma X-re való leszűkítését, azaz $\sigma|_X = \{x, y \in X \times X : \ (x, y) \in \sigma\}$.

Ha X σ-osztályok uniója, akkor $\sigma|_X$ helyett σ-t is fogunk használni.

Tétel 5.2 *(I. Izomorfizmustétel) Legyen σ az S félcsoport tetszőleges kongruenciája, H pedig tetszőleges részfélcsoportja. Akkor $[H]_\sigma/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$.*

Bizonyítás. Legyen φ a $[H]_\sigma$ félcsoportnak a $[H]_\sigma/\sigma$ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa. A $[H]_\sigma$ definíciója miatt

$$\varphi([H]_\sigma) = \varphi(H),$$

és így φ-nek H-ra való leszHukítés H-nak $\varphi([H]_\sigma)$-ra való homomorfizmusa, melynek magja $\sigma|_H$. Ezért

$$[H]_\sigma/\sigma \cong H/(\sigma|_H).$$

Tétel 5.3 *(II. Izomorfizmustétel) Legyenek α és β egy S félcsoport tetszőleges kongruenciái az $\alpha \subseteq \beta$ feltétellel. Akkor*

$$\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in S/\alpha \times S/\alpha : \ (a, b) \in \beta\}$$

$(a, b \in S)$ az S/α faktorfélcsoport kongruenciája, és $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$.

Szerkesztés alatt

Proof. As világos, hogy β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciája. Legyenek φ_1, illetve φ_2 az S-nek S/α-ra, illetve S/α-nak $S/(\beta/\alpha)$-ra való természetes homomorfizmusai. Valamely $a, b \in S$ elemekre

$$(a, b) \in ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2}$$

akkor és csak akkor, ha

$$((a)\varphi_1)\varphi_2 = ((b)\varphi_1)\varphi_2$$

akkor és csak akkor, ha

$$([a]_\alpha)\varphi_2 = ([b]_\alpha)\varphi_2$$

akkor és csak akkor, ha

$$([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta/\alpha$$

akkor és csak akkor, ha

$$(a, b) \in \beta.$$

Tehát

$$ker_{\varphi_1 \circ \varphi 2} = \beta.$$

A homomorfizmus-tétel miatt

$$(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta.$$

5.2. Szabad félcsoportok, végesen reprezentálható félcsoportok

5.3. Félcsoportok beágyazása csoportokba

Tétel 5.4 *Ha egy S félcsoport beágyazható egy csoportba, akkor az S félcsoport egyszerűsítéses.*

Bizonyítás.

Tétel 5.5 *Egy kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be egy csoportba, ha az S félcsoport egyszerűsítéses.*

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

Tétel 5.6 *Minden jobb reverzibilis félcsoportot be lehet ágyazni egy csoportba.*

Bizonyítás.

Definíció 5.3 *Egy $(G;+)$ csoportot rendezett csoportnak nevezünk, ha G-n értelmezve van egy olyan $\leq$ parciális rendezés, hogy tetszőleges $a, b, c \in G$ elemek esetén az $a \leq b$ feltételből $ac \leq bc$ és $ca \leq cb$ következik.*

Definíció 5.4 *Legyen $(G;+,\leq)$ rendezett csoport. A G csoport $G^+ = \{g \in G : \ g \geq 0\}$ részhalmazát a G (adott parciális rendezéshez tartozó) pozitivitástartományának nevezzük.*

Tétel 5.7 *Egy rendezett $(G;+,\leq)$ csoport G^+ pozitivitástartománya rendelkezik a következő feltételekkel:*

(1) $0 \in G^+$,

(2) Ha $a, -a \in G^+$, *akkor* $a = 0$,

(3) Ha $a, b \in G^+$, *akkor* $a + b \in G^+$,

(4) Ha $a \in G^+$, *akkor minden* $g \in G$ *esetén* $g + a - g \in G^+$.

Fordítva, ha P egy G csoportnak a fenti $(1)-(4)$ feltételeket teljesítő részhalmaza, akkor az $a \leq b$ $(a, b \in G)$ akkor ás csak akkor , ha $(-a) + b \in P$ módon definiált relációra nézve G rendezett csoport mégpedig úgy, hogy G pozitivitástartománya (a szóbanforgó parciális rendezésre nézve) egyenlő P-vel.

Egy G csoport pozitivitási tartománya tehát egy speciális félcsoport. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad egy félcsoportra, hogy beágyazható legyen egy csoportba annak pozitivitási tartományaként.

Tétel 5.8 *Egy $(P;+)$ félcsoport akkor és csak akkor izomorf egy rendezett (additív) csoport valamely pozitivitástartományával, ha P teljesíti a következő feltételeket.*

(1) P egyszerűsítéses félcsoport,

(2) P-nek van 0-eleme,

Szerkesztés alatt

(3) Minden $a, b \in P$ esetén $a + b = 0$ akkor és csak akkor teljesülhet, ha $a = b = 0$.

(4) Minden $a \in P$ esetén $a + P = P + a$.

Proof. Legyen P egy rendezett $(G; +)$ csoport pozitivitástartománya. Az előző tétel (1) és (3) állításai miatt P a G nullelemes részfélcsoportja. Az világos, hogy S egyszerűsítéses. Igy a jelen tétel (1) és (2) feltételei teljesülnek. Valamely $a, b \in P$ elemekre $a + b = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha a és b egymás (additív) inverzei, ami az előző tétel (2) Ílítása miatt akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = 0$. Legyenek $a, p \in P$ tetszőleges elemek. Akkor

$$a + p = a + p - a + a = (a + p - a) + a,$$

ahol $a + p - a \in P$ az előző tétel (4) feltétele miatt. Igy

$$a + P \subseteq P + a.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$P + a \subseteq a + P.$$

Következésképpen

$$a + P = P + a,$$

azaz teljesül a jelen tétel (4) feltétele.

Fordítva, legyen P olyan félcsoport, amely teljesíti a tétel feltételeit. Megmutatjuk, hogy megadható olyan $(G; +)$ csoport és azon olyan parciális rendezés, hogy P izomorf a G ezen parciális rendezéshez tartozó pozitivitástartományával. Legyen

$$G = P \times P.$$

A G félcsoporton definiálunk egy (binér) relácót. A tétel (4) és (1) feltételei miatt minden $(a, x) \in G$ elemhez van egy és csak egy olyan $x_a \in P$ elem, amelyre

$$x + a = a + x_a$$

teljeül. Könnyen ellenőrízhető, hogy rögzített $a \in P$ esetén a

$$\phi_a : \ x \ \mapsto \ x_a$$

Szerkesztés alatt

leképezés teljesíti a következő feltételeket:

$$(a)\phi_a = a,\ (x+y)\phi_a = (x)\phi_a + (y)\phi_a,\ ((x)\phi_a)\phi_b = (x)\phi_{a+b}.$$

A már említett relációt a következőképpen értelmezzük:

$$(a,b)\alpha(c,d \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad a + (d)\phi_b = c + b.$$

Először megmutatjuk, hogy α a G egy ekvivalenciarelációja. Teszőleges $a, b \in P$ esetén

$$(a,b)\ \alpha\ (a,b),$$

mert

$$a + (b)\phi b = a + b$$

teljesül

$$(b)\phi_b = b$$

miatt. Igy α reflexív.

Ha valamely $a, b, c, d \in P$ elemekre

$$(a,b)\ \alpha\ (c,d),$$

azaz

$$a + (d)\phi_b = c + b,$$

akkor

$$a + (d)\phi_b + d = c + b + d.$$

Világos, hogy

$$(d)\phi_b + d = d + ((d)\phi_b)\phi_d = d + (d)\phi_{b+d}$$

és

$$b+d = (b+d)\phi_{b+d} = (b)\phi_{b+d} + (d)\phi_{b+d} = ((b)\phi_b)\phi_d + (d)\phi_{b+d} = (b)\phi_d + (d)\phi_{b+d}.$$

Ezért az

$$a + (d)\phi_b + d = c + b + d$$

egyenlőség

$$a + d + (d)\phi_{b+d} = c + (b)\phi_d + (d)\phi_{b+d}$$

formában írható, amelyből a $(d)\phi_{b+d}$ taggal való egyszerűsítés után

$$a + d = c + (b)\phi_d,$$

Szerkesztés alatt

azaz

$$(c,d)\ \alpha\ (a,b)$$

adódik. Tehát α szimmetrikus reláció.

Az α reláció tranzitivitásának igazolásához tegyük fel, hogy

$$(a,b)\ \alpha\ (c,d)$$

és

$$(a,b)\ \alpha\ (g,h)$$

teljesül valamely $a,b,c,d,g,h \in P$ elemekre, azaz

$$a+(d)\phi_b = c+b,$$

$$a+(h)\phi_b = g+b$$

teljesül. Ezek felhasználásával,

$$c+(h)\phi_d+b = c+b+(h)\phi(d+b) = a+(d)\phi_b+(h)\phi_{d+b} = a+(h)\phi_b+(d)\phi_b = g+b+(d)\phi_b = g+d+b.$$

A b-vel való egyszerűsítés után ebből

$$c+(h)\phi_d = g+d$$

adódik, amely viszont azt jelenti, hogy

$$(c,d)\ \alpha\ (g,h).$$

Tehát αtranzitív.

A következő lépésként megmutatjuk, hogy α kongruencia. Először azt mutatjuk meg, hogy jobb kongruencia, majd azt, hogy bal kongruencia.

Legyenek $(a,b),(c,d),(g,h) \in P\times P$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$(a,b)\ \alpha\ (c,d),$$

azaz

$$a+(d)\phi_b = c+b.$$

Megmutatjuk, hogy

$$(a,b)+(g,h)\ \alpha\ (c,d)+(g,h).$$

Szerkesztés alatt

Mivel

$$(a,b)+(g,h)=(a+(g)\phi_b,h+b)$$

és

$$(c,d)+(g,h)=(c+(g)\phi_d,h+d),$$

ezért azt kell megmutatnunk, hogy

$$a+(g)\phi_b+(h+d)\phi_{h+b}=c+(g)\phi_d+h+b.$$

Mivel

$$a+(d)\phi_b=c+b,$$

ezért

$$a+(d)\phi_b+(g)\phi_{d+b}+(h)\phi_b=c+b+(g)\phi_{d+b}+(h)\phi_b.$$

Az egyenlőség bal oldala a következőképpen alakítható.

$$a+(d)\phi_b+(g)\phi_{d+b}+(h)\phi_b=a+(d)\phi_b+((g)\phi_d)\phi_b+(h)\phi_b=$$

$$=a+(d+(g)\phi_d)\phi_b+(h)\phi_b=a+(g+d)\phi_b+(h)\phi_b=$$

$$=a+(g)\phi_b+(d)\phi_b+(h)\phi_b=a+(g)\phi_b+(h)\phi_b+((d)\phi_b)\phi_{(h)\phi_b}=$$

$$=a+(g)\phi_b+(h)\phi_{h+b}+(d)\phi_{b+(h)\phi_b}=a+(g)\phi_b+(h)\phi_{h+b}+(d)\phi_{h+b}=$$

$$=a+(g)\phi_b+(h+b)\phi_{h+d}+(d)\phi_{h+b},$$

amely megegyezik a bizonyítandó egyenlőség bal oldalával. A jobb oldal a következőképpen alakítható.

$$c+b+(g)\phi_{d+b}+(h)\phi_b=c+b+((g)\phi_d)\phi_b+(h)\phi_b=$$

$$=c+(g)\phi_d+b+(h)\phi_b=c+(g)\phi_d+h+b,$$

amely megegyezik a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalával. Itt nem részletezzük, de hasonlóan bizonyítható, hogy α bal kongruencia. Igy α kongruencia a $(P\times P,+)$ félcsoporton.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $G'=(P\times P)/\alpha$ faktorfélcsoport csoport. Az világos, hogy az (a,a) rendezett párok egy α-osztályt alkotnak; ez az ó osztály az egységelem. Egy (a,b) párt tartalmazó osztály inverze a (b,a) párt tartalmazó osztály. Az $a\mapsto(a,0)$ leképezés S-nek G'-be való beágyazása.

Szerkesztés alatt

Jelölések: Legyenek $A_1, A_2, \dots A_n$ egy S félcsoport nem-üres részhalmazai. Akkor legyen

$$A_1 A_2 \dots A_n = \{a_1 a_2 \dots a_n : \ a_i \in A_i 1 \leq i \leq n\}.$$

Ha $A_1 = \dots = A_n$, akkor az $A_1 A_2 \dots A_n = A^n$ jelölést használjuk. Jelölésben nem fodunk különbséget tenni egy a elem és csak az a-t tartalmazó egyelemű halmaz között. Igy például

$$aB = \{ab : \ b \in B\}.$$

Szerkesztés alatt

6. fejezet

Félcsoport ideáljai, a Green-relációk

Mint azt a bevezetőben már értelmeztük, egy S félcsoport valamely nem-üres I részhalmazát bal oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in I$ elem esetén $sa \in I$, azaz $SI \subseteq I$; a jobb ideál fogalma a bal oldali ideál fogalmának duálisa. Ha I jobb oldali és bal oldali ideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja, vagy röviden ideálja S-nek.

Az S félcsoport valamely nem-üres A részhalmazát tartalmazó bal oldali ideálok metszetét az A által generált bal oldali ideálnak nevezzük. Ha $A = \{a\}$, akkor az a elem által generált fő baloldali ideálról beszélünk, amelyet $L(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $L(a) = a \cup Sa = S^1a$. Ennek duálisa az a elem által generált fő jobb oldali ideál, amelyet $R(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $R(a) = a \cup aS = aS^1$. Az a elem által generált főideált $J(a)$-val jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy $J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS = S^1aS^1$.

Megjegyzés 6.1 *Egy S félcsoport tetszőleges a eleme esetén, azon S-beli elemek, amelyek ugyanazt a főideált generálják mint a, a $J(a)$-nak egy nem üres részhalmazát alkotják; ezt a részhalmazt J_a-val fogjuk jelölni. A $J(a) \setminus J_a$ halmazt $I(a)$-val jelöljük.*

Tétel 6.1 *Tetszőleges félcsoport tetszőleges a eleme esetén $I(a)$ vagy üres vagy az S félcsoport ideálja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I(a)$ nem üres egy S félcsoport valamely a eleme esetén. Legyenek $s \in S$ és $b \in I(a)$ tetszőleges elemek. Ha az

Szerkesztés alatt

$bs \in J(a)$ szorzat nem lenne $I(a)$-ban, akkor $bs \in J_a$ teljesülne, azaz fennálna a $J(a) = J(bs)$ egyenlőség. Mivel $J(bs) \subseteq J(b)$, ezért a $J(a) \subseteq J(b)$ tartalmazást kapnánk eredményül. Mivel $b \in J(a)$, ezért $J(b) \subseteq J(a)$. A két tartalmazásból $J(a) = J(b)$ és így $b \in J_a$ következik, ami ellentmond a $b \in I(a) = J(a) \setminus J_a$ tartalmazásnak. Így $bs \in I(a)$. Hasonlóan igazolható, hogy $sb \in I(a)$. Tehát $I(a)$ ideálja S-nek. □

6.1. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoport

Lemma 6.1 *Legyen S tetszőleges félcsoport és A az S tetszőleges ideálja. Akkor $\varrho_A = \{(a,b) \in S \times S : \ a = b$ vagy $a, b \in A\}$ az S kongruenciája.*

Proof. Ha $(a,b) \in \varrho_A$, akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $as = bs$ vagy $as, bs \in A$. Hasonlóan, $sa = sb$ vagy $sa, sb \in A$. Igy ϱ_A jobb kongruencia és bal kongruencia, és így ϱ_A kongruencia (lásd a ? Tételt). □

Definíció 6.1 *A ϱ_A kongruenciát az S félcsoport A ideálja szerinti Rees-kongruenciának nevezzük. A szerinte vett faktorfélcsoportot az S félcsoport A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoportjának nevezzük és S/A-val jelöljük.*

Egy $(S;\cdot)$ félcsoport A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoportjára úgy is tekinthetünk, mint egy olyan félcsoportra, amelynek az elemeit úgy is megkaphatjuk, hogy az $S \setminus A$ halmazhoz adjungálunk egy $0 \notin S \setminus A$ elemet, s az így kapott halmazon a következőképpen definiáljuk a műveletet: Tetszőleges $a, b \in (S \setminus A) \cup \{0\}$ elemekre

$$ab = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a, b, a \cdot b \in (S \setminus A) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A továbbiakban, ha szükséges, egy S/A Rees-féle faktorfélcsoportra az előzőeknek megfelelő formában fogunk hivatkozni. Ezt tesszük már a következő tételekben is.

Tétel 6.2 *Legyen J egy ideálja, T pedig egy részfélcsoportja egy S félcsoportnak. Akkot $J \cap T$ ieálja T-nek, $J \cup T$ részfélcsoportja S-nek, valamint*

$$(J \cup T)/J \cong T/(J \cap T).$$

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Mivel

$$(J \cup T)^2 = J^2 \cup JT \cup TJ \cup T^2 \subseteq J \cup T,$$

ezért $J \cup T$ részfélcsoportja S-nek.

Legyenek $t \in T$ és $a \in J \cap T$ tetszőleges elemek. Akkor

$$ta, at \in T,$$

mivel T részfélcsoportja S-nek. Ugyanakkor

$$ta, at \in J,$$

mert $a \in J$ és J ideálja S-nek. Tehát

$$ta, at \in J \cap T,$$

és így $J \cap T$ ideálja T-nek. Ebből természetesen az is következik, hogy J ideálja $J \cup T$-nek. Így tekinthetjük a $(J \cup T)/J$ és a $T/(J \cap T)$ Rees faktorokat. Ezekre kapjuk, hogy

$$(J \cup T)/J = ((J \cup T) \setminus J) \cup 0 = (T \setminus J) \cup 0 \cong T/J,$$

valamint

$$T/(J \cap T) = (T \setminus (J \cap T)) \cup 0' = (T \setminus J) \cup 0' \cong T/J,$$

ahol 0,illetve $0'$ jelöli a faktorfélcsoportok nullelemeit a fenti sorrendnek megfelelően. □

Tétel 6.3 *Legyen J egy S félcsoport tetszőleges ideálja. Jelölje θ az S félcsoportnak az S/J Rees-féle faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Akkor az $A \mapsto \theta(A) = A/J$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az S félcsoport J-t tartalmazó A ideáljai és az S/J faktorfélcsoport ideálja között, mégpedig úgy, hogy az S félcsoport tetszőleges, J-t tartalmazó A ideálja esetén*

$$(S/J)/(A/J) \cong S/A.$$

Bizonyítás. Tekintsük az S/J Rees-féle faktorfélcsoportot $(S \setminus J) \cup \{0\}$ formában. Akkor tetszőleges S-beli $A \supseteq J$ ideál esetén $\theta(A) = A/J = (A \setminus J) \cup \{0\}$. Mivel θ homomorfizmus, ezért $\theta(A)$ ideálja S/J-nek. Könnyen ellenőrízhető, hogy ha Q tetszőleges ideálja az S/J Rees-féle faktorfélcsoportnak,

Szerkesztés alatt

akkor $A = \theta^{-1}(Q)$ az S félcsoport $J = \theta^{-1}(0)$-t tartalmazó ideálja, amelyre $\theta(A) = Q$ teljesül. Így θ szürjektív leképezése az S félcsoport J-t tartalmazó ideáljainak halmazáról az S/J Rees-féle faktorfélcsoport ideáljait tartalmazó halmazra. Megmutatjuk, hogy θ injektív is. Először is, ha A és B az S félcsoport J-t tartalmazó olyan ideáljai, amelyekre $A \subset B$ teljesül, akkor

$$A \setminus J \subset B \setminus J.$$

Így, ha mindkét halmazhoz ugyanazt a 0 elemet adjungáljuk, akkor az A/J Rees-féle faktorfélcsoport a B/J Rees-féle faktorfélcsoport valódi részfélcsoportjaként tekinthető. Ebből pedig már következik, hogy ha az S félcsoport valamely, J-t tartalmazó A és B ideáljaira $\Theta(A) = \Theta(B)$, azaz $A/J = B/J$ teljesül, akkor $A = B$. Tehát θ valóban injektív.

Az S félcsoport J-t tartalmazó tetszőleges A ideálja esetén

$$(S/J)/(A/J) = ((S/J) \setminus (A/J)) \cup \{0\} = S \setminus A \cup \{0\} \cong S/A.$$

□

Definíció 6.2 *Egy* 0*-elemes S félcsoportot* 0*-egyszerűnek nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$, és S-nek nincs a* 0*-tól és önmagától különböző ideálja.*

Definíció 6.3 *Egy nullelemet tartalmazó S félcsoport valamely M ideálját 0-minimális ideálnak nevezzük, ha $M \neq \{0\}$ és csak* 0 *az egyetlen olyan ideálja S-nek, amelyet M valódi módon tartalmaz.*

Lemma 6.2 *Ha M egy 0-minimális ideálja egy nullelemes S félcsoportnak, akkor $M^2 = \{0\}$ vagy M 0-egyszerű részfélcsoportja S-nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M^2 \neq \{0\}$. Akkor $M^2 = M$. Legyen $a \in M$, $a \neq 0$ tetszőleges elem. Mivel S^1aS^1 az S félcsoport M álta tartalmazott, nullelemtől különböző ideálja, ezért $S^1aS^1 = M$ Innen $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$ következik. Ezért $MaM = M$. A ? Lemma miatt ez azt jelenti, hogy M 0-egyszerű. □

Következmény 6.1 *Legyen S egy félcsoport.*

1. *Ha I és J az S félcsoport olyan ideáljai, amelyekre $J \subset J'$ teljesül, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy J maximális J'-ben (abban az értelemben, hogy nincs S-nek olyan K ideálja, amelyre $J \subset$*

Szerkesztés alatt

$K \subset J'$ teljesülne) az, hogy J'/J 0-minimális ideálja S/J-nek. Ha ez a helyzet, akkor J'/J vagy egy 0-egyszerű félcsoport, vagy egy zéró félcsoport.

2. *Az S félcsoport valamely J ideálja akkor és csak akkor maximális (valódi) ideálja S-nek, ha az S/J Rees-féle faktorfélcsoportnak nincs valódi nem 0 ideálja, azaz, ha S/J vagy 0-egyszerű, vagy egy kételemű zéró félcsoport.*

6.2. Félcsoport főfaktorai

Definíció 6.4 *Egy S félcsoport főfaktorain a $J(a)/I(a)$ Rees-faktorfélcsoportokat értjük. Abban az esetben, ha $I(a) = \emptyset$, akkor a $J(a)/I(a)$ főfaktoron $J(a)$-val izomorf félcsoportot értünk.*

Tétel 6.4 *Tetszőleges félcsoport tetszőleges főfaktora vagy egy egyszerű félcsoport, vagy egy 0-egyszerű félcsoport, vagy egy zéró félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport és $a \in S$ egy tetszőleges elem. Ha $I(a) = \emptyset$, akkor $J(a)$ az S félcsoport minimális ideálja. Akkor viszont a Tétel **??** miatt $J(a) \cong J(a)/I(a)$ egyszerű félcsoport. Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor $I(a) \neq \emptyset$. Mivel ideálok úniója ideál és $I(a)$ maximális ideál $J(a)$-ban. Ezért $J(a)^2 = J(a)$ vagy $J(a)^2 \subseteq I(a)$. Az első esetben $J(a)/I(a)$ 0-egyszerű, a második esetben $J(a)/I(a)$ zéró félcsoport. □

Definíció 6.5 *Egy S félcsoportot féligegyszerű félcsoportnak nevezünk, ha minden főfaktora vagy egyszerű, vagy 0-egyszerű.*

Definíció 6.6 *Egy S félcsoport fősorán az S ideáljainak olyan*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

véges sorozatát értjük, amely S-sel kezdődik, az üres halmazzal végződik, és tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ index esetén sem adható meg S-nek olyan J ideálja, amelyre $S_i \supset J \supset S_{i+1}$ teljesülne (azaz a sor nem finomítható). A fenti fősor faktorain az S_{i+1}/S_i $(i = 1, \ldots, m)$ Rees-féle faktorfélcsoportokat értjük.

Megjegyzés 6.2 *A Tétel miatt, ha*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

egy S félcsoport fősora, akkor tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ index esetén az S_{i+1}/S_i Rees-féle faktorfélcsoport vagy egy 0-egyszerű félcsoport vagy egy zéró félcsoport.

Szerkesztés alatt

Tétel 6.5 *Legyen S olyan félcsoport, amelynek van egy*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

fősora. Akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik a fősor faktorai és az S félcsoport főfaktorai között, mégpedig úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett félcsoportok egymással izomorfak. Speciálisan, az S bármely két fősora egymással izomorf, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősor faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorok egymással izomorfak. Az S azon ideálja, amely a fősor utolsó nem-üres eleme, az S félcsoport magja.

Bizonyítás. Tekintsük a fősor tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ indexhez tartozó S_{i+1}/S_i faktorát. Legyen $a \in S_{i+1}/S_i$ tetszőleges. Az világos, hogy $J(a) \cup S_{i+1}$ az S félcsoport olyan ideálja, amelyre $S_i \supseteq J(a) \cup S_{i+1} \subset S_{i+1}$ teljesül. Mivel S_i és S_{i+1} egy fősor egymás melletti elemei, ezért ebből a tartalmazásból

$$J(a) \cup S_{i+1} = S_i$$

következik.

Legyen $b \in I(a)$ tetszőleges. Akkor

$$b \in S_{i+1}.$$

Ellenkező esetben azt kapnánk, hogy $J(b) \cup S_{i+1} = S_i$, amiből $b \in J(b)$ következne, ellentmondva a $b \in I(a)$ feltételnek. Így tehát minden $b \in I(a)$ elemre $b \in S_{i+1}$ teljesül, s ezért

$$I(a) \subseteq S_{i+1}.$$

Másrészről viszont, ha $c \in J(a) \cap S_{i+1}$, akkor

$$J(c) \subseteq S_{i+1}$$

, ezért

$$J(c) \neq J(a),$$

ami azt eredményezi, hogy

$$c \in I(a).$$

Ez, és közvetlenül az előzőekben bizonyított $I(a) \subseteq S_{i+1}$ tartalmazás azt eredményezi, hogy

$$I(a) = J(a) \cap S_{i+1}.$$

Szerkesztés alatt

A Tétel 6.2 szerint

$$J(a)/(J(a) \cap S_{i+1}) \cong (J(a) \cup S_{i+1})/S_{i+1}.$$

A bal oldali faktérfélcsoport izomorf a $J(a)/I(a)$ Rees-féle faktorfélcsoporttal, a jobb oldali pedig az S_i/S_{i+1} Rees-féle faktorfélcsoporttal. Tehát, a fősor S_i/S_{i+1} faktora izomorf a $J(a)/I(a)$ főfaktorral. □

6.3. A Green-relációk

Tetszőleges S félcsoporton definiáljuk a következő relációkat. Akkor mondjuk, hogy S valamely a és b elemei $\mathcal{L}$-relációban [$\mathcal{R}$-relációban] állnak, ha az általuk generált fő balideálok [fő jobbideálok] megegyeznek, azaz, $S^1a = S^1b$ [$aS^1 = bS^1$]. Az világos, hogy $\mathcal{L}$ az S félcsoport jobb kongruenciája, $\mathcal{R}$ pedig az S egy bal kongruenciája. Az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációk metszetét $\mathcal{H}$-val jelljük.

Lemma 6.3 *Tetszőleges S félcsoport esetén $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ teljesül egy S félcsoport valamely a és b elemeire. Akkor $(a, c) \in \mathcal{L}$ és $(c, b) \in \mathcal{R}$ teljesül S valamely c elemeére, azaz, megadhatók olyan $u, v \in S^1$ elemek, hogy $a = uc$ és $b = cv$. Legyen $d = av = ucv = ub$. Mivel $\mathcal{L}$ jobb kongruencia, ezért $(a, c) \in \mathcal{L}$-ből $(av, cv) \in \mathcal{L}$, azaz, $(d, b) \in \mathcal{L}$ következik. Mivel $\mathcal{R}$ bal kongruencia, ezért $(c, b) \in \mathcal{R}$-ből $(uc, ub) \in \mathcal{R}$, azaz, $(a, d) \in \mathcal{R}$ következik. Igy $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Tehát $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. A fordított tartalmazás hasonlóan bizonyítható. □

Következmény 6.2 $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

Bizonyítás A szerint nyílvánvaló.

Az $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ ekvivalencia relációt $\mathcal{D}$-vel fogjuk jelölni.

Lemma 6.4 *Legyenek a és b egy S félcsoport $\mathcal{R}$-ekvivalens elemei'ugy, hogy $b = as$ és $a = bs'$. Akkor a $\sigma : x \mapsto xs$ $(x \in L_a)$, illetve σ' $y \mapsto ys$, $(y \in L_b)$ leképezések L_a és L_b közötti olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés $\mathcal{R}$-osztály tartó, azaz $(x, x\sigma) \in \mathcal{R}$ és $(y, y\sigma') \in \mathcal{R}$ teljesül minden $x \in L_a$ és $y \in L_b$ elemre.*

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

Lemma 6.5 *Legyenek a és c egy S félcsoport $\mathcal{D}$-ekvivalens elemei. Ha b az S olyan eleme, amelyre $(a,b) \in \mathcal{R}$ és $(b,c) \in \mathcal{L}$, továbbá $as = b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ $(s, s', t, t' \in S^1)$, akkor az $x \mapsto txs$ $(x \in H_a)$ és $z \mapsto t'zs'$ $(z \in H_c)$ leképezések H_a és H_c közötti olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei. Ebből következően, az ugyanazon $\mathcal{D}$-osztályban lévő $\mathcal{H}$-osztlyok számossága egymással megegyezik.*

Bizonyítás

Lemma 6.6 *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges L $\mathcal{L}$-osztálya és tetszőleges R $\mathcal{R}$-osztálya esetén az LR szorzat minden eleme ugyanabban a $\mathcal{D}$-osztályban van.*

Bizonyítás.

Lemma 6.7 *Legyen D egy S félcsoport tetszőleges $\mathcal{D}$-osztálya.*

(1) Ha D tartalmaz egy reguláris elemet, akkor D minden eleme reguláris (ekkor D-t regulárisnak nevezzük).

(2) Ha D reguláris, akkor minden olyan $\mathcal{L}$-osztály és $\mathcal{R}$-osztály, amely benne van D-ben tartalmaz egy idempotens elemet.

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

7. fejezet

Félcsoport transzlációs burka, félcsoportok ideálbővítése

Definíció 7.1 *Egy S félcsoport önmagába va'o $\lambda(.)$ leképezését bal transzlációnak nevezzük, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $\lambda(xy) = lambda(x)y$. Az S félcsoportnak egy önmagába való $(.)\varrho$ leképezését jobb transzlációnak nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in S$ elemek esetén $(xy)\varrho = x(y)\varrho$ teljesül. Azt mondjuk, hogy egy λ bal transzláció és egy ϱ jobb transzláció álló láncszemet alkotnak, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $x\lambda(y) = (x)\varrho y$.*

Megjegyzés 7.1 *For an arbitrary element a of a semigroup S let λ_a [ϱ_a] denote the mapping of S into itself defined by $(s)\lambda_a = as$ [$\varrho_a(s) = sa$] ($s \in S$). Könnyen ellenőrízhető, hogy λ_a [ϱ_a] az S félcsoport bal [jobb] transzlációja. λ_a-t [ϱ_a-t] az S félcsoport (a eleme álta definiált) belső bal [jobb] transzlációjának nevezzük. Az $(xa)y = x(ay)$ egyenlőség miatt λ_a és ϱ_a lámcszemet alkotnak.*

Lemma 7.1 *Egy S félcsoport bal [jobb] transzlációinak Λ [P] halmaza az S félcsoport összes önmagba való egyértelmű leképezéseiből álló $\mathcal{T}_S$ félcsoportnak egy részfélcsoportja.*

Bizonyítás. Ha $x, y \in S$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tetszőlegesek, akkor

$$(\lambda_1\lambda_2)(xy) = \lambda_1(\lambda_2(xy)) = \lambda_1((\lambda_2(x)y) = \lambda_1(\lambda_2(x))y = ((\lambda_1\lambda_2)(x))y.$$

A jobb transzlációkra vonatkozó állítás bizonítása hasonló.

Jelölje Λ_0, illetve P_0 egy S félcsoport belső bal, illetve belső jobb transzlációinak halmazát.

Szerkesztés alatt

Lemma 7.2 *Tetszőleges S félcsoport esetén az $a \mapsto \lambda_a$, illetve az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetések ($a \in S$) az S félcsoportnak Λ_0-ra, illetve P_0-ra való homomorfizmusai.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $s, a, b \in S$ elemek esetén $\lambda_{ab}(s) = (ab)s = a(bs) = \lambda_a(\lambda_b(s)) = (\lambda_a\lambda_b)(s)$, valamint $(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = ((s)\varrho_a)\varrho_b = (s)(\varrho_a\varrho_b)$, ezért az áll'ıtás nyilvánvaló.

Lemma 7.3 *legyenek λ és ϱ egy S félcsoport tetszőleges bal, illetve jobb transzlációi. Legyen $a \in S$. Akkor*

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$$

és

$$\varrho_a\varrho = \varrho_{(a)\varrho}.$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{(a)\varrho}$$

és

$$\varrho\varrho_a = \varrho_{\lambda(a)}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in S$ esetén

$$(\lambda\lambda_a)(x) = \lambda(ax) = (\lambda(a))x = \lambda_{\lambda_a}(x),$$

$$(x)\varrho_a\varrho = (xa)\varrho = x((a)\varrho) = (x)\varrho_{(a)\varrho}.$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$(\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a(\lambda(x)) = ((a)\varrho)x = \lambda_{(a)\varrho},$$

$$(x)(\varrho\varrho_a) = ((x)\varrho)\varrho_a = ((x)\varrho)a = x(\lambda(a)) = (x)\varrho_{\lambda(a)}.$$

7.1. Félcsoportok transzlációs burka

Jelölések: Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje $\overline{S}$ az S azon λ bal transzlációiból, illetve ϱ jobb transzlációiból álló (λ, ϱ) párok halmazát, amelyek láncszemet alkotnak. Jelölje $\overline{S}_0$ a (λ_a, ϱ_a) párok halmazát!

Szerkesztés alatt

Lemma 7.4 *Tetszőleges S félcsoport esetén $\overline{S}$ félcsoportot alkot a $(\lambda_1, \varrho_1)(\lambda_2, \varrho_2) = (\lambda_1\lambda_2, \varrho_1\varrho_2)$ műveletre nézve. Ennek a félcsoportnak $\overline{S}_0$ egy részfélcsoportja. Az $a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$ leképezés S-nek $\overline{S}_0$-ra való homomorfizmusa.*

Bizonyítás. Legyenek λ_1 és λ_2 tetszőleges bal transzlációk, ϱ_1 és ϱ_2 pedig tetszőleges jobb transzlációk. Az nyilvánvaló, hogy $\lambda_1\lambda_2$ bal transzlácoi, $\varrho_2\varrho_2$ pedig jobb transzláció. Legyenek $x, y \in S$ tetszőlegesek. Akkor

$$x((\lambda_1\lambda_2)(y)) = x(\lambda_1(\lambda_2(y))) = ((x)\varrho_1)(\lambda_2(y)) = (((x)\varrho_1)\varrho_2)y = ((x)(\varrho_1\varrho_2))y.$$

Ezért $\lambda_1\lambda_2$ és $\varrho_1\varrho_2$ láncszemet alkotnak. Tehát $\overline{S}$ félcsoport. Mivel $(\lambda_a, \varrho_a)(\lambda_b, \varrho_b) = (\lambda_{ab}, \varrho_{ab})$, ezért $\overline{S}_0$ részfélcsoportja $\overline{S}$-nek. Az nyilvánvaló, hogy $a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$ homomorfizmusa S-nek $\overline{S}_0$-ra.

Definíció 7.2 *Egy S félcsoportról akkor mondjuk, hogy gyengén reduktív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $ax = bx$ és $xa = xb$ minden $x \in S$-re való teljesüléséből $a = b$ következik.*

Lemma 7.5 *Egy S félcsoport akkor és csak akkor gyengén reduktív, ha az $a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$ homomorfizmus S-nek $\overline{S}_0$-ra való izomorfizmusa.*

Bizonyítás. Legyen S gyengén reduktív félcsoport. Legyen $(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b)$ valamely $a, b \in S$ elemekre. akkor $\lambda_a = \lambda_b$ és $\varrho_a = \varrho_b$, s ezért S minden x elemére $ax = bx$ és $xa = xb$ teljesül. Mive S gyengén reduktív, $a = b$. Fordítva, tegyük fel, hogy az $a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$ homomorfizmus injektív. Ha $a, b \in S$ olyan elemek, hogy S minden x elemére $ax = bx$ és $xa = xb$ teljesül, akkor $(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b)$, s ezért $a = b$. Tehát S gyengén reduktív.

Tétel 7.1 *Legyen S gyengén reduktív félcsoport. Azonosítsuk S-et az S transzlációs burkának belső részével, azaz $\overline{S}_0$-lal. Akkor S ideálja $\overline{S}$-nek és minden $a \in S$ $(\lambda, varrho) \in \overline{S}$ esetén $(\lambda, \varrho)a = \lambda(a)$ és $a(\lambda, \varrho) = (a)\varrho$.*

Bizonyítás. Az előző és a ? Lemmát használva,

$$(\lambda, \varrho)a = (\lambda, \varrho)(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda\lambda_a, \varrho\varrho_a) = (\lambda_{\lambda(a)}, \varrho_{\lambda(a)}) = \lambda(a)$$

és

$$a(\lambda, \varrho) = (\lambda_a, \varrho_a)(\lambda, \varrho) = (\lambda_a\lambda, \varrho_a\varrho) = (\lambda_{(a)\varrho}, \varrho_{(a)\varrho}) = (a)\varrho.$$

Szerkesztés alatt

7.2. Félcsoportok ideálbővítése

Definíció 7.3 *Legyen A tetszőleges, Q pedig nullelemes (de egyébként tetszőleges) félcsoport. Az S félcsoportot az A félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett ideálbővítésének (röviden bővítésének) nevezzük, ha S tartalmaz olyan, az A-val izomorf B ideált, hogy az S/ϱ_B faktorfélcsoport izomorf Q-val.*

Megjegyzés 7.2 *Megjegyezzük, hogy a továbbiakban A-t mindig azonosítjuk B-vel.*

Tétel 7.2 *Legyen A tetszőleges, Q pedig nullelemes félcsoport. Legyen φ a Q^*-nak S-be való parciális homomorfizmusa. Legyen $S = A \cup Q^*$. Az S-en értelmezzük a következő műveletet. Akkor $(S; \circ)$ félcsoport, amely A-nak Q-val való bővítése. Ha A egységelemes félcsoport, akkor A-nak Q-cal való minden bőv—́itése a fenti módon (azaz parciális homomorfizmusokkal) konstruálható.*

Tétel 7.3 *Legyen A egy gyengén reduktív félcsoport és S az A-nak valamely nullelemes Q félcsoporttal való ideálbővítése. Akkor van $\Omega(A)$-nak Q-val olyan S' ideálbőv—́itése, amelynek S részfélcsoportja. Fordítva, ha van $\Omega(A)$-nak Q-val egy S' ideálbővítése, akkor A-nak is van Q-val olyan ideálbővítése, amely az S' félcsoport részfélcsoportja.*

Proof. Legyen S egy gyengén reduktív A félcsoportnak egy nullelemes Q félcsoporttal való ideálbőv—́itése. Feltehetjük, hogy $S = A \cup Q^*$. Mivel A gyengén reduktív, ezért A beágyazható ideálként az $Omega(A)$ transzlációs burokba. Ennél a beágyazásnál egy $a \in A$ elemhez a (λ_a, ϱ_a) belső bitranszlációt rendeljük hozzá.

Szerkesztés alatt

8. fejezet

Jobb (0-)egyszerű félcsoportok

Definíció 8.1 *Egy S félcsoport S-től különböző jobb oldali [bal oldali] ideáljait valódi jobb oldali [bal oldali] ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot jobb [bal] egyszerűnek nevezünk, ha nincs nem valódi jobb [bal] oldali ideálja.*

Tétel 8.1 *Egy S félcsoport akkor és csak akkor jobb [bal] egyszerű, ha $aS = S$ ($Sa = S$) teljesül minden $a \in S$ eleme esetén.*

Bizonyítás. Legyen S jobb egyszerű félcsoport. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén, aS az S egy jobb oldali ideálja, s ezért

$$aS = S.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy minden $a \in S$ elem esetén $aS = S$. legyen R tetszőleges jobb oldali ideálja S-nek. Akkor tetszőleges $a \in R$ elem esetén

$$S = aS \subseteq RS \subseteq R,$$

azaz az $R \subseteq S$ tartalmazás miatt

$$R = S$$

következik. Tehát S jobb egyszerű. □

Megjegyzés 8.1 *Egy félcsoport minden jobb [bal] oldali nulleleme bal [jobb] oldali ideálja a félcsoportnak.*

Megjegyzés 8.2 *Ha egy nullelemes S félcsoportban csak $\{0\}$ az egyetlen valódi jobb [bal] oldali ideál, akkor $S^2 = S$ vagy $S^2 = \{0\}$. Ezen utóbbi esetben S-nek legfeljebb két eleme van.*

Szerkesztés alatt

Definíció 8.2 *Egy nullelemes S félcsoportot jobb 0-egyszerűnek [bal 0-egyszerűnek] nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$ és a nullelemen kívül nincs más valódi jobb [bal] oldali ideája.*

Tétel 8.2 *Legyen S egy nullelemes félcsoport. S jobb 0-egyszerű [bal 0-egyszerű] akkor és csak akkor, ha $S-\{0\}$ jobb egyszerű [bal egyszerű] félcsoport.*

Proof. Legyen S tetszőleges nullelemes félcsoprt. Tegyük fel, hogy S jobb 0-egyszerű. Ha $ab = 0$ teljesülne valamely S-beli nemnulla a és b elemekre, akkor $Z_a = \{x \in S : \ ax = 0\}$ az S félcsoport a-t tartalmazó jobb oldali ideálja lenne, és S jobb 0-egyszerűsége miatt ez egyenlő lenne S-sel. Ekkor viszont $aS = \{0\}$ teljesülne, amiből azt kapnánk, hogy $Z = \{x \in S : \ xS = \{0\}\}$ az S félcsoport b-t tartalmazó jobb oldali ideálja, amiből $Z = S$ adódna. Akkor viszont azt kapnánk, hogy $S^2 = \{0\}$, ami ellentmondás. Tehát S-ben a nemnulla elemek egy részfélcsoportot alkotnak. Legyen B tetszőleges jobb oldali ideálja $S - \{0\}$-nak. Akkor $\{0\} \neq B^0$ jobb oldali ideálja S-nek, és így $B^0 = S$. Ebből $B = S - \{0\}$ adódik. Tehát $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoport.

Fordítva, legyen $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoport. Akkor $(S - \{0\})^2 = S - \{0\}$. Igy $S^2 \neq \{0\}$. Legyen B tetszőleges nemnulla jobb oldali ideálja S-nek. Az világos, hogy $0 \in B$. Mivel $B - \{0\}$ jobb oldali ideálja az $S - \{0\}$ félcsoportnak, ezért $B - \{0\} = S - \{0\}$ az $S - \{0\}$ félcsoport jobb egyszerű'ege miatt. Igy $B = S$. Tehát S jobb 0-egyszerű. Ezzel a tételt bebizonyítottuk a jobb oldali esetre. A bal oldali eset bizonyíása hasonlóan végezhető el. □

Megjegyzés 8.3 *Az előző tétel alapján a jobb 0-egyszerű, illetve bal 0-egyszerű félcsoportokat megkaphatjuk, ha a jobb egyszerű, illetve a bal egyszerű félcsoportokhoz nullelemet adjungálunk.*

8.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoportok

Lemma 8.1 *Jobb egyszerű félcsoport minden idempotens eleme bal oldali egységelem.*

Proof. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoport tetszőleges idempotens eleme. Mivel S jobb egyszerű, ezért tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható S-nek olyan x eleme, melyre

$$ex = a$$

Szerkesztés alatt

teljesül. Igy,

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

minden $a \in S$ elemre. Tehát, e bal oldali egységeleme S-nek.

A következőkben azokkal a jobb egyszerű félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek tartalmaznak legalább egy idempotens elemet (ilyenek például a véges jobb egyszerű félcsoportok).

Lemma 8.2 *Ha S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet, akkor S bal egyszerűsítéses.*

Bizonyítás. Jelöljön S egy olyan jobb egyszerű félcsoportot, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ca = cb.$$

Legyen $f \in E_S$ tetszőleges idempotens elem. A Tétel 8.1 szerint f az S bal oldali egységeleme. Mivel S jobb egyszerű, ezért van S-nek olyan x eleme, hogy

$$cx = f.$$

Legyen

$$e = xc.$$

Akkor

$$e^2 = xcxc = xfc = xc = e,$$

azaz

$$e \in E_S,$$

felhasználva azt is, hogy f az S bal oldali egységeleme. Igy

$$a = ea = xca = xcb = eb = b.$$

Tehát S bal egyszerűsítéses. □

Lemma 8.3 *Ha S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet, akkor S tetszőleges e idempotens eleme esetén Se csoport.*

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoport tetszőleges idempotens eleme. Az világos, hogy Se részfélcsoportja S-nek; ez tartalmazza e-t, amely Se-nek bal oldali egységeleme (mert a Tétel 8.1 miatt e bal oldali egységelem S-ben). Mivel minden $a \in eS$ elem $a = se$ alakban irható valamely $s \in S$ elemmel, ezért

$$ae = (se)e = se^2 = se = a,$$

azaz e az Se részfélcsoportban jobb oldali egységelem is. Tehát Se egységelemes félcsoport (benne e az egységelem). Legyen

$$a \in Se$$

tetszőleges elem. Mivel S jobb egyszerű, ezért van olyan $x \in S$ elem, hogy

$$ax = e.$$

Ebből

$$a(xe) = (ax)e = e^2 = e$$

adódik. Tehát $xe \in Se$ az $a \in Se$ elem jobb oldali inverze. Ebből már következik, hogy Se az S félcsoport részcsoportja. □

Definíció 8.3 *Egy S félcsoportot jobbcsoportnak nevezünk, ha jobb egyszerű és bal egyszerűsítéses.*

Lemma 8.4 *Egy S félcsoport akkor és csak akkor jobbcsoport, ha az $ax = b$ egyenletnek van egy és csak egy megolása S-ben minden $(a, b) \in S \times S$ elempár esetén.*

Bizonyítás. A lemma állítása a jobbcsoport definíciójának, illetve a Tétel 8.1-nek közvetlen következménye. □

Könnyen ellenőrízhető, hogy minden csoport jobbcsoport, illetve minden jobbzéró félcsoport is jobbcsoport.

Megjegyzés 8.4 *Mivel jobb egyszerű félcsoportok direkt szorzata is jobb egyszerű, és bal egyszerűsítéses félcsoportok direkt szorzata is bal egyszeHusítéses, ezért jobbcsoportok direkt szorzata is jobbcsoport.*

Tétel 8.3 *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

Szerkesztés alatt

(1) S jobbcsoport.

(2) S jobb egyszerű, és tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

(3) S egy csoportnak és egy jobbzéró félcsoportnak a direkt szorzata.

Proof. (1) implikálja (2)-t. Minden jobbcsoport jobb egyszerű definíció szerint, ezért csk azt kell megmutatni, hogy minden jobbcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyen a egy S jobbcsoport tetszőleges eleme. S jobb egyszerűsége miatt van olyan $e \in S$ elem, hogy

$$ae = a,$$

és így

$$ae^2 = ae,$$

amiből

$$e^2 = e$$

következik S bal egyszerűsíthetősége miatt. Tehát e az S félcsoport idempotens eleme.

(2) implikálja (3)-t. Legyen S olyan tetszőleges jobb egyszerű félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A Lemma 8.1 szerint S minden idempotens eleme az S bal oldali egységeleme. A Lemma 8.2 szerint S bal egyszerűsítéses. A Lemma 8.3 szerint minden S-beli e idempotens elem esetén Se az S részcsoportja.

A bizonyítás további részében legyen e az S egy rögzített idempotens eleme. Jelölje G az Se részcsoportot. Mivel E_S minden eleme az S bal oldali egységeleme, ezért E_S az S jobbzéró részfélcsoportja. Meg fogjuk mutatni, hogy a G csoportnak az E_S jobb zéró félcsoporttal képezett $G \times E_S$ direkt szorzata izomorf S-sel. Pontosabban, megmutatjuk, hogy

$$\Phi : \ (g, f) \ \mapsto \ gf$$

a $G \times E_S$ direkt szorzatnat S-re való izomorfizmusa. Mivel

$$\Phi((g_1, e_1)(g_2, e_2)) = \Phi((g_1g_2, e_1e_2)) = \Phi((g_1g_2, e_2)) =$$

$$= (g_1g_2)e_2 = g_1e_1g_2e_2 = \Phi((g_1, e_1))\Phi((g_2, e_2)),$$

ezért Φ a $G \times E_S$ direkt szorzatnak az S félcsoportba való homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy

$$\Phi((g_1, e_1)) = \Phi((g_2, e_2)),$$

Szerkesztés alatt

azaz

$$g_1e_1 = g_2e_2.$$

Akkor

$$g_1 = g_1e = g_1e_1e = g_2e_2e = g_2e = g_2$$

és így

$$g_2e_2 = g_1e_1 = g_2e_1.$$

Mivel S bal egyszerűsítéses, ezért

$$e_2 = e_1.$$

Tehát

$$(g_1, e_1) = (g_2, e_2),$$

és ezért Φ injektív. Már csak azt kell megmutatni, hogy Φ szürjektív. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Akkor

$$ax = a$$

valamely $x \in S$-re, amiből

$$ax^2 = ax,$$

ebből pedig

$$x^2 = x$$

következik (ez utóbbi az S bal egyszerűsíthetősége miatt). Igy

$$x \in E_S,$$

és

$$\Phi((ae, x)) = aex = ax = a.$$

Tehát Φ szürjektív. Igy

$$S \cong G \times E_S.$$

(3) implikálja (1)-et. A bizonyítás triviális, mivel egy csoport és egy jobbzéró félcsoport jobbcsoport, ezért azok direkt szorzata is jobbcsoport. □

Tétel 8.4 *Egy félcsoport akkor és csak akkor jobbcsoport, ha olyan diszjunkt részcsoportjainak uniója, melyek egységelemei a félcsoport jobbzéró részfélcsoportját alkotják.*

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Legyen S jobbcsoport. Akkor a Tétel 8.1 miatt S minden idempotens eleme bal oldali egységelem, s ezért S idempotenseinek E_S halmaza az S félcsoport egy jobbzéró részfélcsoportját alkotja. Legyenek

$$a \in S$$

és

$$e \in E_S$$

tetszőleges elemek. Mivel S jobb egyszerű, ezért megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$ax = e$$

teljesül. Ebből

$$axa = ea = a$$

adódik, mivel e bal oldali egységeleme S-nek. Megszorozva ezen utóbbi egyenlőséget x-szel balról, azt kapjuk, hogy

$$(xa)^2 = xa,$$

azaz,

$$f = xa \in E_S.$$

Így

$$a = axa = af \in Sf.$$

Mivel Sf részcsoportja S-nek (lásd a Tétel 8.3-t), ezért azt kaptuk eredményként, hogy S minden eleme benne van S egy részcsoportjában. Így S diszjunkt részcsopoprtok úniója, s a részcsoportok egységelemei (azaz az S idempotens elemei) az S egy jobbzéró részfélcsoportot alkotják.

Fordítva, legyen S olyan félcsoport, amely olyan diszjunkt részcsoportjainak úniója, amelyek egységelemei az S félcsoport jobbzéró részfélcsoportját alkotják. A Tétel 8.3 szerint elegendő azt megmutatni, hogy S jobb egyszerű. Legyenek

$$a, b \in S$$

tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan S-beli e és f idempotens elemek, hogy

$$a \in G_e, \quad b \in G_f,$$

Szerkesztés alatt

ahol G_e és G_f jelölik S azon maximális részcsoportjait, amelyek egységelemei az e, illetve az f idempotens elemek. Jelöljék

$$a^{-1} \in G_e, \quad b^{-1} \in G_f$$

az a, illetve b elemek inverzeit (G_e-ben, illetve G_f-ben). Akkor

$$aa^{-1}b = eb = e(fb) = (ef)b = fb = b,$$

azaz

$$x = a^{-1}b$$

az $ax = b$ egyenlet megoldása S-ben. A Lemma 8.4 szerint elegendő már csak azt megmutatni, hogy az $ax = b$ egyenletnek nincs egynél több megoldása. Tegyük fel, hogy

$$ax_1 = b$$

és

$$ax_2 = b$$

teljesül valamely $a, b, x_1, x_2 \in S$ elemekre. Tegyük fel, hogy

$$a \in G_e$$

valamely S-beli G_e maximális részcsoportra. Akkor

$$ex_1 = a^{-1}b = ex_2.$$

Ha $x_1 \in G_{f_1}$ és $x_2 \in G_{f_2}$ (f_1, f_2 az S idempotens elemei), akkor

$$x_1 = fx_1 = (ef_1)x_1 = e(f_1x_1) = ex_1 = ex_2 =$$

$$= e(f_2x_2) = (ef_2)x_2 = f_2x = 2 = x_2.$$

□

Tétel 8.5 *Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerűsítéses jobb egyszerű félcsoport csoport.*

Bizonyítás. Mivel egy jobb egyszerűsítéses jobbzéró félcsoport egyelemű, ezért a tétel állítása a Tétel 8.4 miatt nyílvánvaló. □

Szerkesztés alatt

8.2. Idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportok

Tétel 8.6 *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden $\mathcal{L}$-osztálya egy elemet tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport olyan elemei, amelyek esetén

$$S^1a = S^1b.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$a = xb$$

és

$$b = ya.$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Akkor az x és y közül legalább az egyik nem egyenlő 1-gyel. Ekkor viszont

$$a = xya,$$

ahol $xy \in S$. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S,$$

s így van olyan $u \in S$ elem, hogy

$$xy = au.$$

Ebből és az előbbi egyenlőségből

$$a = aua$$

, amiből pedig

$$au = (au)^2$$

következik. Tehát au az S félcsoport idempotens eleme, ellentmondva az S-re vonatkozó feltételnek. Így

$$a = b.$$

Következésképpen S minden $\mathcal{L}$-osztálya egy elemet tartalmaz. □

Szerkesztés alatt

Tétel 8.7 *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden a és b elemei esetén az $ax = b$ egyenletnek S-ben végtelen sok megoldása van.*

Bizonyítás. Legyen S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Jelölje $M_a \subseteq S$ az $ax = b$ egyenlet megoldásainak halmazát. Legyen $x \in M_a$ tetszőleges elem. Mivel $bS = S$ is teljesül, ezért megadható olyan $y \in S$ elem, hogy

$$by = a.$$

Tekintsük a

$$\varphi \ : \ x \ \mapsto xyx$$

leképezést ($x \in M_a$). Az $ax = b$ és $by = a$ egyenlőségekből

$$axy = a,$$

ezen utóbbi egyenlőségből pedig

$$a\varphi(x) = a(xyx) = ax = b$$

adódik. Tehát

$$\varphi(M_a) \subseteq M_a.$$

Az világos, hogy φ-nek nincs fixpontja M_a-ben. Ugyanis, ha valamely $x \in M_a$ elem esetén fennállna az $xyx = x$ egyenlőség, akkor xy az S félcsoport idempotens eleme lenne, ami nem lehet az S-re vonatkozó feltételek miatt. Tetszőleges $x \in M_a$ elemmel képezzük az M elemeiből álló

$$\varphi^{(0)} = x, \varphi^{(1)}(x) = \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n+1)}(x) = \varphi(\varphi^{(n)}(x)), \ldots \tag{8.1}$$

sorozatot. Az világos, hogy

$$\varphi^{(m)}(x) \in xSx$$

minden m pozitív egész számra. Tegyük fel, hogy

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(m)}$$

valamely $n > m$ nemnegatív egész számokra. Akkor

$$\varphi^{(m)}(x) = \varphi^{(n)}(x) = \varphi(n-m)(\varphi^{(m)}(x)) \in \varphi^{(m)}(x)S\varphi^{(m)}(x),$$

Szerkesztés alatt

amiből azt kapjuk, hogy $\varphi^{(m)}(x)t$ az S félcsoport idempotens eleme valamely $t \in S$ elemmel. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy S-nek nincs idempotens eleme. Tehát a (8.1) sorozat elemei az M_a halmaz páronként különböző elemei. Az M_a halmaz tehát végtelen sok elemet tartalmaz. □

Tétel 8.8 *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden eleme az S végtelen sok különböző fő balideáljának eleme.*

Bizonyítás. Legyen b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport tetszőleges eleme. Rögzített $a \in S$ elem esetén jelölje M_a az $ax = b$ egyenlet összes S-beli megoldásainak halmazát. Az előző tétel miatt M_a végtelen sok elemet tartalmaz. Ha u és v az M_a különböző elemei, akkor

$$b = au \in Su$$

és

$$b = av \in Sv,$$

valamint a Tétel 8.6 szerint $Su \neq Sv$. Így b végtelen sok különböző fő balideál eleme. □

Tétel 8.9 *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden x eleme esetén Sx is idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen x egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű S félcsoport tetszőleges eleme. Az világos, hogy Sx olyan részfélcsoportja S-nek, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyen $a \in Sx$ tetszőleges eleme. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S.$$

Így

$$a(Sx) = (aS)x = Sx.$$

A Tétel 8.1 szerint Sx jobb egyszerű. □

A továbbiakban azokkal az idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek jobb egszerűsítésések. Példa ilyen félcsoportra az un. Baer-Levi félcsoport.

Szerkesztés alatt

Definíció 8.4 *Jelöljenek $p \geq q$ tetszőleges végtelen számosságokat. Egy S félcsoportot (p, q)-típusú Baer-Levi félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan p számosságú A halmaz, hogy S az A halmaz önmagába való mindazon bijektív η leképezéseinek félcsoportja (a leképezések kompozíciójára nézve), amelyek esetén az $A \setminus A\eta$ halmaz számossága q.*

Tétel 8.10 *Tetszőleges $p \geq q$ számosságok esetén létezik (p, q)-típusú Baer-Levi félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen A egy p számosságú halmaz. Legyenek ξ és η az A önmagába való olyan bijekciói, amelyekre az $A \setminus A\xi$ és $A \setminus A\eta$ halmazok számossága q. A tétel bizonyításához meg kell mutatni, hogy az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q. Mivel η bijektív, ezért $A \setminus A\xi$-t bijektív módon képezi le $A\eta \setminus A\xi\eta$-ra, és így $|A \setminus A\xi| = |A\eta \setminus A\xi\eta|$. Mivel

$$A \setminus A\xi\eta = (A \setminus A\eta) \cup (A\eta \setminus A\xi\eta),$$

és a jobb oldalon álló két diszjunkt halmaz mindegyikének a végtelen q a számossága, ezért az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q. □

Tétel 8.11 *Minden Baer-Levi félcsoport idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéses és jobb egyszerű.*

Bizonyítás.

Lemma 8.5 *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x, y \in S$ esetén $xy \neq y$.*

Bizonyítás.

Lemma 8.6 *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x \in S$ elem esetén$|S \setminus Sx| = |S|$, és így S számossága szükségképpen végtelen.*

Bizonyítás.

Tétel 8.12 *Legyen S idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoport. Akkor S-et be lehet ágyazni egy (p, p)-típusú Baer-Levi félcsoportba, ahol $p = |S|$.*

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

Tétel 8.13 *Egy S félcsoportot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoportba, ha S idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses félcsoport.*

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

9. fejezet

(0-)egyszerű félcsoportok

Definíció 9.1 *Egy S félcsoport S-től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot egyszerűnek nevezünk, ha nincs nem valódi ideálja.*

Tétel 9.1 *Egy S félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha $S = SaS$ teljesül minden a eleme esetén.*

Bizonyítás.

Tétel 9.2 *Ha egy S félcsoport minimális jobb oldali ideáljainak úniója, akkor S egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoport előáll R_i $(i \in I)$ minimális jobb ideáljainak úniójaként. Legyenek $x \in S$ és $y \in R_i$ tetszőleges elemek $(i \in I)$. Akkor yxS az S olyan jobb oldali ideálja, amelyik benne van az R_i minimális jobb oldali ideálban. Ezért

$$yxS = R_i.$$

Ezért

$$S = \cup_{i \in I} R_i = \cup_{y \in S} yxS = SxS.$$

A Tétel 9.1 szerint ez azt jelenti, hogy S egyszerű félcsoport. □

Megjegyzés 9.1 *Egy félcsoport nulleleme (ha létezik) ideál.*

Megjegyzés 9.2 *Ha egy nullelemes S félcsoportban csak $\{0\}$ az egyetlen valódi ideál, akkor $S^2 = S$ vagy $S^2 = \{0\}$. Ezen utóbbi esetben S-nek legfeljebb két eleme van. Mint, ahogy azt az előző szakaszban már ismertettük, egy*

Szerkesztés alatt

nullelemes S félcsoportot 0-egyszerűnek nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$ és a nullelemen kívül nincs más valódi ideája.

Tétel 9.3 *Egy 0-elemes S félcsoport akkor és csak akkor 0-egyszerű, ha minden $0 \neq a \in S$ elem esetén $SaS = S$.*

Proof. Legyen S 0-egyszerű félcsoport. Akkor $S^2 \neq \{0\}$. Legyen $B = \{b \in S : \ SbS = \{0\}\}$. Az világos, hogy B az S félcsoport ideálja. Ha $B \neq \{0\}$ teljesülne, akkor B megegyezne S-sel, amibŐl $S^3 = \{0\}$ és így $S^2 = \{0\}$ adódna, ami ellentmondás. Tehát $B\{0\}$, azaz $SaS = S$ minden $0 \neq a \in S$ elemre.

Fordítva, legyen S olyan nullelemes félcsopoprt, amelyben $SaS = S$ teljesül minden $0 \neq a \in S$ elemre. Akkor $S^3 = S$, amiböl $S^2 \neq \{0\}$ következik. Legyen A az S félcsoport tetszőleges nem-nulla ideálja. Akkor tetszőleges $0 \neq a \in A$ esetén $S = SaS \subseteq SAS \subseteq A$, amiből $A = S$ adódik. Tehát S 0-egyszerű félcsoport. □

Definíció 9.2 *Egy S félcsoport valamely M ideálját minimális ideálnak nevezzük, ha nem tartalmazza valódi módon S egyetlen ideálját sem.*

Megjegyzés 9.3 *Ha A és B egy S félcsoport ideáljai, akkor AB is ideĺja S-nek és $AB \subseteq A \cap B$. Ebből következik, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy minimális ideálja van. Ha egy félcsoportnak van minimális ideĺja, akkor azt a fĺcsoport magjának nevezzük. Könnyen látható, hogy egy félcsoportnak akkor és csak akkor van magja, ha összes ideáljának metszete nem üres.*

9.1. Croisot-Teissier félcsoportok

Legyenek p és q olyan végtelen számosságok, amelyekre $p \geq q$ teljesül. Legyen A olyan halmaz, melynek számossága nagyobb vagy egyenlő mint p. Legyen $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i : \ i \in I\}$ az A halmazon értelmezett páronként különböző olyan ekvivalencia-relációk halmaza, amelyek szerint vett $A/\mathcal{E}_i$ faktorhalmazok mindegyike p számosságú. Az A halmaz egy B részhalmazáról azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}$ által jól szeparált, ha B számossága p és minden egyes $\mathcal{E}_i$-nek a B-re való $\mathcal{E}_i \cap (B \times B)$ leszűkítése a B identikus relációja. Minden $i \in I$ indexre jelölje T_i az A-nak önmagába való mindazon $(\cdot)\eta_i$ leképezéseinek halmazát, amelyekre a következők teljesülnek:

1. $\eta_i \circ \eta_i^{-1} = \mathcal{E}_i$;

Szerkesztés alatt

2. A-nak valamely, $\mathcal{E}$ által jól szeparált B részhalmaza esetén
   (a) $A\eta_i \subseteq B$ és
   (b) $|B \setminus A\eta_i| = q$.

Megjegyezzük, hogy ha A-nak van $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmaza, akkor minden $i \in I$ indexre a T_i halmaz nem üres.

R. Sikorski példát adott ilyen esetre. Legyenek I tetszőleges nem-üres halmaz. Jelöljön E egy végtelen p számosságú halmazt. Jelölje A az E halmaznak önmagával képezett $|I|$-szeres descartes szorzatát, azaz A mindazon kiválasztási függvények halmaza, amelyek minden I-beli i indexhez egy E-beli elemet rendelnek. Tetszőleges $j \in I$ index esetén jelölje $\mathcal{E}_j$ az A halmaz következő ekvivalencia-relációját: valamely $a, b \in A$ elemek akkor és csak akkor álljanak relációban, ha $a(j) = b(j)$. Az világos, hogy

$$|A/\mathcal{E}_j| = |E| = p.$$

Az is igaz, hogy az A halmaz mindazon b elemeinek B halmaza, amelyekre

$$b(i) = b(j)$$

teljesül minden $i, j \in I$ indexekre, az A-nak egy, az $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmaza.

Ha az A halmaz tartalmaz $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazt, akkor a fent definiált leképezések $\cup_{i\in I} T_i$ halmazát $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ módon fogjuk jelölni.

Lemma 9.1 *$CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $i, j \in I$ indexek és tetszőleges $\xi \in T_i$, $\eta \in T_j$ elemek esetén $\xi\eta \in T_i$. Legyenek tehát $i, j \in I$ és $\xi \in T_i$, $\eta \in T_j$ tetszőlegesek. Akkor

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i, \quad \eta \circ \eta^{-1} = \mathcal{E}_j,$$

továbbá megadható A-nak két olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = Y \setminus A\eta| = q$$

Szerkesztés alatt

teljesülnek. Ezen feltételekből egyrészt

$$(\xi\eta)\circ(\xi\eta)^{-1}=\xi\circ\eta\circ\eta^{-1}\circ\xi^{-1}=\xi\circ\mathcal{E}_j\circ\xi^{-1}=\xi\circ\iota_X\circ\xi^{-1}=\xi\circ\xi^{-1}=\mathcal{E}_i$$

következik.

Legyen

$$Z=X\eta.$$

Akkor

$$|Z|=|X|=p,$$

mivel X jól szeparált $\mathcal{E}$ által, s ezért η-nak X-re való leszűkítése bijektív. Mivel

$$Z\subseteq A\eta\subseteq Y,$$

azaz Z benne van egy $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazban, valamint $|Z|=p$, ezért Z jól szeparált $\mathcal{E}$ által.

Mivel

$$A\xi\subseteq X,$$

ezért

$$A\xi\eta\subseteq X\eta=Z.$$

Mivel η-nak X-re való leszűkítése bijekció, ezért

$$q=|X\setminus A\xi|=|(X\setminus A\xi)\eta|=|X\eta\setminus A\xi\eta|=Z\setminus A\xi\eta|.$$

A fentiek együtt azt eredményezik, hogy

$$\xi\eta\in T_i.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $CT(A,\mathcal{E},p,q)$ olyan félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak. □

Definíció 9.3 *A $CT(A,\mathcal{E},p,q)$ félcsoportot Croisot-Teissier-féle félcsoportnak nevezzük.*

Lemma 9.2 *Egy $CT(A,\mathcal{E},p,q)$ félcsoportban a T_i részhalmaz minden $i\in I$ index esetén minimális jobb oldali ideál.*

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Legyen $S = CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ egy tetszőleges Croisot-Teissier-féle félcsoport, valamint T_i $(i \in I)$ a félcsoportot definiáló részhalmazok egyike. T_i a Tétel 9.1 szerint az S félcsoport egy ideálja. Legyenek $\xi, \eta \in T_i$ tetszőleges elemek. Akkor megadható A-nak két olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = Y \setminus A\eta| = q$$

teljesülnek. Definiáljuk A-nak önmagába való ζ leképezését a következőképpen. Először ζ-nak $A\xi$-n való hatását értelmezzük. Tetszőleges $x \in A$ esetén rendelje ζ az $x\xi$ elemhez az $x\eta$ elemet. Mivel

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i = \eta \circ \eta^{-1},$$

ezért ζ jól definiált, egyértékű leképezés. Valójában ζ az $A\xi$ halmaznak az $A\eta$ halmazra való bijekciója. Mivel X jól szeparált $\mathcal{E}$ által és mert $A\xi \subseteq X$, ezért minden $x \in A$ elem esetén van egy és csak egy olyan $\mathcal{E}_i$-osztály, amely $x\xi$-t tartalmazza. Ennek az osztálynak minden eleméhez rendelje ζ az $x\eta$ elemet. Jelölje C azon $\mathcal{E}_i$ osztályok halmazát, amelyeknek $A\xi$-vel vett metszete az üres halmaz. Mivel

$$|A/\mathcal{E}_i| = p,$$

ezért

$$|C| \leq p.$$

Mivel p végtelen és

$$|Y \setminus A\eta| = p,$$

ezért megadható C-nek $Y \setminus A\eta$-ba egy olyan δ bijekciója, amelyre

$$|(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$$

teljesül. Válasszunk egy ilyen δ-t, és definiáljuk ζ-t a C halmazhoz tartozó $\mathcal{E}_i$ osztályokon a következőképpen: adott C-hez tartozó $\mathcal{E}_i$ osztály minden eleméhez ζ rendelje hozzá az $Y \setminus A\eta$ halmaz azon elemét, amelyet δ az $\mathcal{E}_i$ osztályhoz rendelt. Az világos, hogy

$$\zeta \circ \zeta^{-1} = \mathcal{E}_i,$$

Szerkesztés alatt

$$A\zeta \subseteq Y$$

és

$$|Y \setminus A\zeta| = |(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p.$$

Mindezek miatt

$$\zeta \in S = CT(A, \mathcal{E}, p, q).$$

Továbbá az is nyílvánvaló, hogy

$$\xi\zeta = \eta.$$

Az előzőek alapján tehát minden $\xi \in T_i$ elem setén

$$\xi S = S.$$

Ebből viszont már adódik, hogy T_i minimális ideálja S-nek. □

Tétel 9.4 *Minden Croisot-Teissier-féle $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoport idempotens elem nélküli egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ tetszőleges Croisot-Teissier-féle félcsoport. A Lemma 9.2 szerint a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportot definiáló T_i $(i \in I)$ részhalmazok a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoport minimális jobb oldali ideáljai. Mivel $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ ezen jobb oldali ideálok úniója, ezért a Lemma 9.2 szerint $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ egyszerű félcsoport.

A bizonyítás hátalévő részében megmutatjuk, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoport nem tartalmaz idempotens elemet. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportnak van olyan ξ eleme, amelyre $\xi^2 = \xi$ teljesül. Jelölje X az A halmaz egy olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazát, amelyre $A\xi \subseteq X$ és $|X \setminus A\xi| = q$ teljesül. Mivel ξ-nek X-ra való leszűkítése bijekció, ezért

$$X\xi \setminus A\xi^2| = q.$$

Mivel

$$X\xi \subseteq A\xi,$$

ezért viszont a $\xi^2 = \xi$ feltétel miatt

$$X\xi \setminus A\xi^2 = \emptyset,$$

ami ellentmond az előző eredménynek, mivel q végtelen számosságot jelöl. □

Szerkesztés alatt

Tétel 9.5 *Egy S félcsoportot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoportba, ha S nem tartalmaz idempotens elemet, és ha $xu = yu$ teljesül valamely $x, y, u \in S$ elemekre, akkor $xv = yv$ minden $v \in S$ elemre fennáll.*

Bizonyítás.

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

10. fejezet

Teljesen (0)-egyszerű félcsoportok

10.1. Rees-mátrix félcsoportok

Legyen G egy csoport. jelölje G^0 azt a félcsoportot, amelyet a G csoportból úgy származtatunk, hogy ahhoz egy nullelemet adjungálunk. A G^0 félcsoportot 0-elemes csoportnak fogjuk nevezni.

Legyen X egy tetszőleges nem-üres halmaz, és legyen $i \mapsto a_i$ X-nek G^0-ba való leképezése. Ha $a_i = 0$ minden $i \in X$ indexre, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő a 0 elemmel. Ha $a_j \neq 0$ valamely $j \in X$ indexre, de az összes többi $i \in X$ indexre $a_i = 0$, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget szintén definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő az a_j elemmel. Ha $a_j \neq 0$ és $a_k \neq 0$ teljesül valamely $j \neq k$ indexekre, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget nem definiáljuk.

Legyenek I és Λ tetszőleges nem-üres halmazok. A G^0 feletti $I \times \Lambda$ típusú mátrixot Rees-mátrixnak nevezzük, ha legfeljebb egy egy olyan eleme van, amely nem egyenlő a 0 elemmel. Ha ez az elem a G csoport a eleme, amely a mátrixban az i-dik sorban, illetve a j-dik oszlopban áll (azaz az (i, j) rendezett párhoz van hozzárendelve), akkor a mátrixot $(a)_{ij}$ módon is fogjuk jelölni. A $(0)_{ij}$ kifejezést is fogjuk használni; ez tetszőleges $i \in I$ és $j \in \Lambda$ index esetén azt az $I \times \Lambda$ típusú Rees/mátrixot fogja jelölni, amelynek minden eleme a 0 elemmel egyenlő.

Legyen $P = (p_{\lambda i}$ egy G^0 feletti tetszőleges $\Lambda \times I$ típusú mátrix (vagyis nem feltétlenül egy Rees-mátrix).

Szerkesztés alatt

Lemma 10.1 *Nullelemes csoport feletti tetszőleges $I \times \Lambda$ típusú $(a)_{ij}$ és $(b)_{r,t}$ Rees-mátrixok és tetszőleges $\Lambda \times I$ típusú P mátrix esetén $(a)_{ij}P(b)_{rt}$ egy Rees-mátrix, mégpedig*

$$(a)_{ij}P(b)_{rt} = (ap_{rj}b)_{it}.$$

Bizonyítás. on olyan

Definíció 10.1 *Egy S félcsoport valamely $e \neq 0$ idempotens elemét primitív idempotens elemnek nevezzük, ha tetszőleges f idempotens elem esetén az $f \leq e$ feltételből $f = 0$ vagy $f = e$ következik.*

Definíció 10.2 *Egy legalább kételemű egyszerű S félcsoportot [illetve egy 0-egyszerű S félcsoportot] teljesen egyszerűnek [teljesen 0-egyszerűnek] nevezünk, ha tartalmaz egy primitív idempotens elemet. Az egyelemű félcsoportot teljesen egyszerűnek tekintjük.*

Szerkesztés alatt

10.2. A Rees-tétel

Ebben a fejezetben a teljesen egyszerű, illetve a teljesen 0-egyszerű félcsoportokat jellemezzük a Ress-mátrix félcsoportok segítségével.

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

11. fejezet

Félcsoportok szubdirekt szorzat

Tétel 11.1 *(Birkhoff-tétel) Minden félcsoport felbontható szubdirekt irreducibilis félcsoportok szubdirekt szorzatára.*

Proof. Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha S egyelemű, akkor a tétel Ílítása nyílvánvaló. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 2$. Az S félcsoport tetszőleges, egymától különböző a és b elemei esetén jelölje $P_{a,b}$ az S félcsoport mindazon Φ kongruenciáinak halmazát, amelyre $(a, b) \notin \Phi$ teljesül. $P_{a,b} \neq \emptyset$, mert $\iota_S \in P_{a,b}$. A $P_{a,b}$ halmaz a relációk tartalmazására nézve részben rendezett. Megmutatjuk, hogy $P_{a,b}$ minden részláncának van $P_{a,b}$-ben felső korlátja.

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

12. fejezet

Félcsoportok félhálója

Definíció 12.1 *Legyen $\mathcal{C}$ félcsoportok egy osztálya. Egy S félcsoport valamely σ kongruenciáját $\mathcal{C}$-kongruenciának nevezzük, ha az S/σ faktorfélcsoport benne van $\mathcal{C}$-ben; az ehhez tartozó partíciót S $\mathcal{C}$-felbontásának nevezzük. Ha σ a legszűkebb $\mathcal{C}$-kongruencia (ha létezik ilyen), akkor a hozzá tartozó partíciót S legbővebb $\mathcal{C}$-felbontásának nevezzük, s az S/σ faktorfélcsoportról azt mondjuk, hogy az S legbővebb $\mathcal{C}$-homomorf képe.*

Megjegyzés 12.1 *Az világos, hogy ha $\mathcal{V}$ félcsoportoknak tetszőleges varietása, akkor az S-en értelmezett $\mathcal{V}$-kongruenciák metszete is $\mathcal{V}$-kongruencia, s így létezik S-nek legszűkebb $\mathcal{V}$-kongruenciája, azaz legbővebb $\mathcal{V}$-felbontása.*

Definíció 12.2 *Ha egy S félcsoport minden eleme idempotens, akkor S-et kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló.*

Megjegyzés 12.2 *Mivel a félhálók varietást alkotnak, a fenti megjegyzésnek megfelelően minden félcsoportnak létezik legbővebb félháló-felbontása, azaz legszűkebb félháló-kongruenciája. Ebben a fejezetben megkonstruáljuk tetsHoleges félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciáját.*

Definíció 12.3 *Egy félcsoport valamely I ideálját teljesen prím ideálnak nevezzük, ha S tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in I$-ből $a \in I$ vagy $b \in I$ következik.*

Definíció 12.4 *Egy S félcsoport valamely F részfélcsoportját filternek nevezzük, ha S tetszőleges a, b elemei eseténb $ab \in F$-ből $a, b \in F$ következik.*

Szerkesztés alatt

Megjegyzés 12.3 *Tehát egy S félcsoport valamely nemüres részhalmaza akkor és csak akkor filter, ha a komplementere egy teljesen prím ideál.*

Megjegyzés 12.4 *Ha I egy valódi teljesen prím ideálja egy S félcsoportnak, akkor S felbomlik I és I komplementerének félhálójára. Fordítva, ha egy S félcsoport felbomlik két részfélcsoportjának félhálójára, akkor abból az egyik az S félcsoport egy valódi prím ideálja.*

Tétel 12.1 *Legyen J egy S félcsoport filtereinek valamely nem-üres részhalmaza. Akkor*

$$\sigma_J = \{(a,b) \in S \times S : \ (\forall F \in J) \ a,b \in F \ \textit{vagy} \ a,b \notin F\}$$

az S félcsoport egy félháló-kongruenciája. Fordítva, S tetszőleges félháló-kongruenciája a fenti módon állítható elő.

Proof. Az nyilvánvaló, hogy σ_J az S félcsoport ekvivalenciarelációja. Legyenek $a, b, s \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \sigma_J$. Ha $a, b \in F$ valamely F filterre, akkor $sa, sb \in F$ vagy $sa, sa \notin F$ attól függően, hogy $s \in F$, vagy $s \notin F$. Ha $a, b \notin F$, akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $sa, sa \notin F$, mert F komplementere teljesen prím ideál. Tehát σ_J bal oldali kongruencia. Hasonlóan adódik, hogy σ_J jobb oldali kongruencia. Tehát σ_J az S félcsoport egy kongruenciája. Mivel minden F filterre és minden $a \in S$ elemre $a^2 \in F$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in F$, ezért $(a, a^2) \in \sigma_J$ minden $a \in S$ elemre. Tehát az S/σ_J faktorfélcsoport egy köteg. Tegyük fel, hogy $ab \in F$ teljesül S valamely F filtere és valamely a, b elemei esetén. Akkor $a \in F$ és $b \in F$, de ekkor $ba \in F$. Ezért $(ab, ba) \in \sigma_J$, s ezért az S/σ_J faktorfélcsoport egy félháló.

Fordítva, legyen σ egy félháló-kongruenciája egy S félcsoportnak. Jelöljük az S/σ félhálót Y-nal, és a σ-osztályokat S_α-val ($\alpha \in Y$). Adott $\alpha \in Y$ elem esetén legyen $F_\alpha = \cup_{\beta \geq \alpha, \ \beta \in Y} S_\beta$. Ha $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\alpha = \alpha$ és $\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\delta\alpha = alpha$, és ezért $\beta\delta \geq \alpha$. Ebből az adódik, hogy F_α részfélcsoportja S-nek. Ha $\beta\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\alpha = alpha$ and $\delta\alpha = \alpha$, és így $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$. Ez viszont azt jelenti, hogy F_α filter. Legyen J az F_α filterek halmaza. Megmutatjuk, hogy $\sigma = \sigma_J$. Ha $(a,b) \in \sigma$, akkor $a, b \in F_\alpha$ vagy $a, b \notin F_\alpha$ minden $\alpha \in Y$-ra. Ezért $(a,b) \in \sigma_J$. Tehát $\sigma \subseteq \sigma_J$. Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \sigma_J$. Jelölje ξ és η az Y azon elemeit, amelyekre $a \in S_\xi$ és $b \in S_\eta$ teljesül. Mivel $a \in F_\xi$, ezért $b \in F_\xi$, amiből $\eta \geq \xi$ következik. Mivel $b \in F_\eta$, ezért $a \in F_\eta$, amiből $\xi \geq \eta$ következik. Ezért

Szerkesztés alatt

$\xi = \eta$, azaz $(a, b) \in \sigma$. Tehát $\sigma_J \subseteq \sigma$. Következésképpen $\sigma = \sigma_J$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés 12.5 *Világos, hogy filterek nem-üres részhalmazának metszete is filter. Ezért egy S félcsoport tetszőleges x eleme esetén van S-nek olyan legszűkebb filtere, amely x-et tartalmazza; jelölje ezt a filtert $N(x)$. Legyen $N_x = \{y \in S : \ N(x) = N(y)\ \}$. Az előző tételt is használva, világos, hogy ezek az N_x-ek az S félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciájának osztályai.*

Definíció 12.5 *Egy félcsoportot félhálófelbonthatatlannak nevezünk, ha az univerzális relációja az egyetlen félháló-kongruenciája.*

Lemma 12.1 *Egy S félcsoport tetszőleges x eleme esetén N_x félhálófelbonthatatlan félcsoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, indirekt módon, hogy van N_x-en olyan σ félháló-kongruenciája, és vannak olyan a, b elemei, amelyekre $(a, b) \notin \sigma$ teljesül. Mivel $a, b \in N_x$, világos, hogy $N(a) = N(b) = N(x)$. Mivel $(a, b) \notin \sigma$, az előző tétel miatt van N_x-nek olyan F filtere, hogy $a \in F$ és $b \notin F$, vagy $a \notin F$ és $b \in F$. Mivel F filter S-ben is, ezért $N(a) \neq N(b)$. Ez ellentmond a fenti egyenlőségnek.

Következmény 12.1 *Minden félcsoport felbontható félhálófelbonthatatlan félcsoportok félhálójára.*

Definíció 12.6 *Egy S félcsoportot arkhimédeszi félcsoportnak nevezünk, ha bármely két elemét véve, mindegyik osztója a másik valahanyadik hatványának.*

Tétel 12.2 *Minden arkhimédeszi félcsoport félhálófelbonthatatlan.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy arkhimédeszi félcsoport tetszőleges elemei. Akkor $a^n = xby$ és $b^m = uav$ teljesül valamely pozitív egész n és m számra, valamint S valamely x, y, u, v elemeire. Legyen τ tetszőleges félháló-kongruencia S-en. Akkor

$$a\,\tau\,a^n = xby\,\tau\,xb^{m+1}y\,\tau xb^m yb = xuavyb\,\tau(xby)(uav) = a^n(uav)\,\tau ua^{n+1}v\,\tau uav = b^m\,\tau b.$$

Tehát τ az S félcsoport univerzális-relációja.

Tétel 12.3 *Tetszőleges félcsoporton a következő két feltétel egymással ekvivalens.*

Szerkesztés alatt

(1) S arkhimédeszi félcsoportok félhálója.

(2) Tetszőleges S-beli a és b elemek esetén abból a feltételből, hogy a osztja b-t, következik, hogy a^2 osztja b valahanyadik hatványát.

Definíció 12.7 *Legyen Y egy félháló, és legyenek S_α $(\alpha \in Y)$ tetszőleges félcsoportok úgy, hogy $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ minden $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$ esetén. Tegyük fel, hogy minden $\alpha \geq \beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$ esetén van olyan $(.)\phi_{\alpha,\beta}$ homomorf leképezése S_α-nak S_β-ba, hogy az alábbiak teljesülnek*

(1) $\phi_{\alpha,\alpha} = id_{S_\alpha}$, $(\alpha \in Y)$,

(2) $\phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$ minden $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Y)$ esetén.

Az $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Ha $a \in S_\alpha$ és $b \in S_\beta$, akkor legyen $a * b = (a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\phi_{\beta,\alpha\beta}$, ahol a jobb oldalon $(a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ és $(b)\phi_{\beta,\alpha\beta}$ között az $S_{\alpha\beta}$ félcsoportbeli műveletet kell tekinteni. Könnyen ellenőrízhető, hogy S erre a műveletre nézve félcsoportot alkot, és S az S_α félcsoportok Y félhálója. Ezt a félcsoportot az S_α félcsoportok erős félhálójának nevezzük és $S = [Y;\ S_\alpha,\ \phi_{\alpha,\beta}]$ módon jelöljük. A $\{\phi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \geq \beta}$ leképezés-családot az S-en értelmezett műveletet meghatározó homomorfizmusok tranzitív-rendszerének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\alpha > \beta$ esetén $S_\alpha \cup S_\beta$ retrakt bővítése S_β-nak.

Tétel 12.4 *Tetszőleges félcsoport esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S részcsoportok félhálója.

(2) S részcsoportok erős félhálója.

Bizonyítás. Világos, hogy elegendő csak azt bizonyítani, hogy (1)-ből következik (2). Legyen az S félcsoport a G_α részfélcsoportok Y félhálója $(\alpha \in Y)$. Legyenek α és β tetszőleges Y-beli elemek az $\alpha \geq \beta$ feltétellel. Ha e_β jelöli G_β egységelemét, akkor $\varphi_{\alpha,\beta}:\ a \mapsto ae_\beta$ $(a \in G_\alpha)$ a G_α részcsoportnak a G_β részcsoportba való leképezése. Mivel tetszőleges $a, b \in G_\alpha$ esetén

$$(ab)\varphi_{\alpha,\beta} = (ab)e_\beta = a(be_\beta) = a(e_\beta(be_\beta) = (ae_\beta)(be_\beta) = (a)\varphi_{\alpha,\beta}(b)\varphi_{\alpha,\beta},$$

Szerkesztés alatt

ezért $\varphi_{\alpha,\beta}$ homomorfizmus. Az világos, hogy $\varphi_{\alpha,\alpha} = id_{G_e}$ minden $\alpha \in Y$-ra. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ tetszőleges elemek úgy, hogy $\alpha \geq \ b \geq \gamma$. Akkor $e_\beta e_\gamma = (e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma} = ((e_\beta)^2)\varphi_{\beta,\gamma} = (e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma}(e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma} = (e_\beta e_\gamma)^2$ miatt $e_\beta e_\gamma$ a G_γ egységeleme, azaz $e_\beta e_\gamma = e_\gamma$. Ezért tetszőleges $a \in G_\alpha$ esetén

$$(a)\varphi_{\alpha,\gamma} = ae_\gamma = ae_\beta e_\gamma = (a)\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\beta,\gamma}.$$

Továbbá, tetszőleges $\alpha, \beta \in Y$ és tetszőleges $a \in G_\alpha, b \in G_\beta$ esetén

$$ab = (ab)e_{\alpha\beta} = (ae_{\alpha\beta})(be_{\alpha\beta}) = (a)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

Ezért S a G_α $(\alpha \in Y)$ részcsoportok erős félhálója.

Tétel 12.5 *Ha $S = [Y;\ S_\alpha,\ \phi_{\alpha,\beta}]$ az S_α félcsoportok félhálója, akkor S előáll olyan T_α félcsoportok szubdirekt szorzataként, ahol minden α-ra T_α izomorf S_α-val vagy S^0_α-lal.*

Bizonyítás. Ha α az Y nulleleme, akkor legyenn $T_\alpha = S_\alpha$, egyébként pedig legyen T_α az a félcsoport, amelyet S_α-ból egy 0_α nullelem adjungálásával kapunk. Minden $\alpha \in Y$ elem esetén definiáljuk S-nek egy önmagába való $(.)\theta_\alpha$ leképezését a következőképpen. Legyen $(b)\theta_\alpha = (b)\phi_{\beta,\alpha}$, $b \in S_\beta$ és $\beta \geq \alpha$, és legyen $(b)\theta_\alpha = 0_\alpha$ minden más esetben. Legyenek $b \in S_\beta$ és $c \in S_\gamma$ tetszőleges elemek. Ha $\beta\gamma \geq \alpha$, akkor kapjuk, hogy

$$(b)\theta_\alpha(c)\theta_\alpha = (b)\phi_{\beta,\alpha}(c)\phi_{\gamma,\alpha} = [((b)\phi_{\beta,\beta\gamma})((c)\phi_{\gamma,\beta\gamma})]\phi_{\beta\gamma,\alpha} =$$

$$= (bc)\phi_{\beta\gamma,\alpha} = (bc)\theta_\alpha.$$

Minden más esetben pedig

$$(b)\theta_\alpha(c)\theta_\alpha = 0_\alpha = (bc)\theta_\alpha.$$

Következésképpen θ_α az S félcsoportnak T_α-ra való homomorfizmusa. Az világos, hogy

$$\theta :\ s \mapsto ((s)\theta_\alpha)_{\alpha \in Y}$$

az S félcsoportnak a $(T_\alpha)_{\alpha \in Y}$ félcsoportok szubdirekt szorzatára való homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy $(b)\theta = (c)\theta$ valamely $b \in S_\beta$ és $c \in S_\gamma$ elemekre. Akkor minden $\alpha \in Y$ elem esetén $\beta \geq \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\gamma \geq \alpha$ fennáll, és így $\beta = \gamma$. Akkor viszont $b = (b)\theta_\beta = (c) = theta_\gamma = c$, azaz θ injektív.

Szerkesztés alatt

Következmény 12.2 *A kételemű félháló az egyetlen nemtriviális szubdirekt irreducibilis félháló.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt arra az esetre, amikor $S = Y$ és minden S_α triviális (azaz egyelemű).

12.1. Kötegek

Az előző fejezetben már definiáltuk a köteg fogalmát. A kötegek vizsgálatában fontos szerepet játszanak a derékszügű kötegek. Lássuk ezek egyik definícióját!

Definíció 12.8 *Legyenek A és B tetszőleges nem-üres halmazok. Az $A \times B$ descartes-szorzaton definiáljunk egy műveletet a következőképpen. Ha (a, b) és (c, d) tetszőleges $A \times B$-beli elemek, akkor legyen $(a, b)(c, d) = (a, d)$. Könnyen ellenőrízhető, hogy ezzel egy asszociatív műveletet definiáltunk $A \times B$-n. Az így definiált félcsoportot derékszögű kötegnek nevezzük.*

Tétel 12.6 *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S derékszögű köteg;

(2) S sehol sem kommutatív;

(3) S köteg és teljesíti az $aba = a$ azonosságot;

(4) S köteg és teljesíti az $abc = ac$ azonosságot.

(5) S egy balzéró és egy jobbzéró félcsoport direkt szorzata;

Proof. Az nyílvánvaló, hogy (1)-ből következik (2). Megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3). Legyen S sehol sem kommutatív félcsoport. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén a és a^2 egymással felcserélhetők, ezért $a = a^2$, azaz S köteg. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $a(aba) = aba = (aba)a$, ezért $a = aba$. Igy S teljesíti (3)-at. Megmutatjuk, hogy (3)-ból következik (4). Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Akkor $abc = (aca)(bc) = a(cabc) = ac$. Tehát S teljesíti (4)-et. Megmutatjuk, hogy (4)-ből következik (5). Tegyük fel, hogy S teljsíti (4)-t. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Legyen $L = Sa$és $R = aS$. Akkor $sata = sa$ és $asat = at$ $(s, t \in S)$ miatt L egy balzéró, R pedig egy jobbzéró félcsoport. Megmutatjuk, hogy $S \cong L \times R$. Legyen

Szerkesztés alatt

$(sa, at) \in L \times R$ tetszőleges elem. Legyen $\phi((sa, at)) = sat$. Mivel minden $s \in S$ elemre $s = saas$, ezért ϕ is szürjektív. Megmutatjuk, hogy ϕ injectív. Legyen $\phi((sa, at)) = \phi((ua, av))$ $(s, t, u, v \in S)$. Akkor $sat = uav$ és így $sa = sata = uava = ua$, valamint $at = asat = auav = av$. Tehát $(sa, at) = (ua, av)$, amely azt eredményezi, hogy ϕ injekt'iv. Mivel $\phi((sa, at)(ua, av)) = \phi((sa, av)) = sav$ és $\phi((sa, at))\phi((ua, av)) = (sat)(uav) = sav$, ezért ϕ homomorfizmus. Teh't ϕ egy izomorf leképezése az $l \times R$ direkt szorzatnak az S-re. Már csak annak igazolása van hátra, hogy (5)-ből következik (1). De ez a derékszögű köteg definíciója alapján nyilvánvaló. □

Tétel 12.7 *Tetszőleges S köteg esetén $\sigma = \{(a, b) \in S \times S : \ a = aba$ és $b = bab\}$ az S legszűkebb félháló-kongruenciája.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy σ reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy σ tranzitív. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$ és $b\sigma c$ teljesül az S köteg valamely a, b, c elemeire. Akkor

$$a = aba = a(bcb)a = ab(cba)(cba) = a(bcb)a(cba) = (aba)(cba) = acba$$

és, hasonlóan,

$$a = abca.$$

Ezekből viszont

$$a = (acba)(abca) = (ac)(bab)(ca) = a(cbc)a = aca$$

adódik. Hasonló módon bizonyítható, hogy

$$c = cac.$$

Igy $a\sigma c$. Tehát σ tranzitív.

Megmutatjuk, hogy σ jobbkongruencia. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$. Akkor

$$(ac)(abc)(ac) = (ac)(abc)(abac) = a(cab)(cab)(ac) = a(cab)(ac)$$

$$= (ac)(abac) = (ac)(ac) = ac,$$

$$(abc)(ac)(abc) = (ab)(ca)(ca)(bc) = (ab)(ca)(bc) = (abc)(abc) = abc.$$

Igy $ac\sigma abc$. Továbbá,

$$(bc)(abc)(bc) = (bc)(abc) = (babc)(abc) = b(abc)(abc) = (bab)c = bc,$$

Szerkesztés alatt

$$(abc)(bc)(abc) = (abc)(abc) = abc.$$

Igy $bc\sigma abc$. Mivel σ tranzitív, ezért $ac\sigma bc$. Tehát σ jobbkongruencia. Hasonlóan bizonyítható, hogy σ balkongruencia. Ezért σ kongruencia. Mivel

$$ab = (ab)(ba)(ab)$$

és

$$ba = (ba)(ab)(ba),$$

ezért $ab\sigma ba$. Igy S/σ kommutatív köteg, azaz félháló. Legyen τ az S köteg tetszőleges félháló-kongruenciája. Akkor tetszőleges $a, b \in S$ esetén az $a\sigma b$ feltételből

$$a = aba\tau bab = b$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $\sigma \subseteq \tau$, azaz σ az S köteg legszűkebb félháló-kongruenciája. □

Következmény 12.3 *Minden köteg derékszögű kötegek félhálója.*

□

Megjegyzés 12.6 *Tetszőleges S köteg esetén az $a \leq b$ $(a, b \in S)$ akkor és csak akkor, ha $ab = a, ba = b$ módon definiált reláció egy parciális rendezési reláció, azaz reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.*

Tétel 12.8 *Legyen Y félháló. Tetszőleges $\gamma \in Y$ elem esetén legyenek L_γ és R_γ tetszőleges nem üres halmazok úgy, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\delta \neq \gamma$. Legyen $S_\gamma = L_\gamma \times R_\gamma$. Minden $\gamma \geq \delta$ esetén legyenek adottak az $\alpha_{\delta,\gamma} : S_\gamma \mapsto \mathcal{T}(L_\delta)$ és $\beta_{\gamma,\delta} : S_\gamma \mapsto \mathcal{T}(R_\delta)$ függvények, amelyek a következőképpen vannak definiálva.*

$$\alpha_{\delta,\gamma} : (i, \mu) \mapsto \alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)},$$

$$\beta_{\gamma,\delta} : (i, \mu) \mapsto \beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)}.$$

Tegyük fel, hogy minden $\gamma, \delta \in Y$ és minden $(i, \mu) \in S_\gamma$, $(j, \nu) \in S_\delta$ elemekre teljesülnek a következők.

(1) $[\alpha_{\gamma,\gamma}^{(i,\mu)}] = i$, $[\beta_{\gamma,\gamma}^{(i,\mu)}] = \mu$,

(2) $[\alpha_{\gamma\delta,\gamma}^{(i,\mu)} \alpha_{\gamma\delta,\delta}^{(j,\nu)}] = k$, $[\beta_{\gamma,\gamma\delta}^{(i,\mu)} \alpha_{\delta,\gamma\delta}^{(j,\nu)}] = \xi$ *for some* $(k, \xi) \in S_{\gamma\delta}$,

Szerkesztés alatt

(3) a (2) jelöléseit használva, minden $\epsilon < \gamma\delta$ esetén $\alpha^{(k,\xi)}_{\epsilon,\gamma\delta} = \alpha^{(i,\mu)}_{\epsilon,\gamma}\alpha^{(j,\nu)}_{\epsilon,\delta}$ $\beta^{(k,\xi)}_{\gamma\delta,\epsilon} = \beta^{(i,\mu)}_{\gamma,\epsilon}\beta^{(j,\nu)}_{\delta,\epsilon}$.

Legyen $S = \cup_{\alpha\in Y} S_\alpha$. A fenti jelöléseket használva, definiáljunk egy $*$ műveletet S-en a következőképpen $(i,\mu) * (j,\nu) = (k,\xi)$. Akkor $(S,*)$ köteg. Fordítva, minden köteget így lehet konstruálni.

Bizonyítás. Legyen S egy köteg. Az előző tétel miatt S előáll S_γ derékszögű kötegek Y félhálójaként. A ? Tétel miatt minden $\gamma \in Y$ esetén vannak olyan L_γ balzéró és R_γ jobbzéró félcsoportok, hogy $S_\gamma \cong L_\gamma \times R_\gamma$. S_γ-t azonosítani fogjuk $L_\gamma \times R_\gamma$-val, és S-et $S = \cup_{\gamma\in Y}(L_\gamma \times R_\gamma)$ formában tekintjük. Természetesen feltehetjük, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\gamma \neq \delta$.

Legyenek γ és δ tetszőleges Y-beli elemek úgy, hogy $\gamma \geq \delta$. Legyen $(i,\mu) \in S_\gamma$ tetszőleges. Ha $(j,\nu) \in S_\delta$, akkor $(i,\mu)(j,\nu) = (k,\xi) \in S_\delta$, és így

$$(k,\xi) = (i,\mu)(j,\nu)[(i,\mu)(j,\nu)](j,\nu) = (k,\xi)(j,\nu) = (k,\nu),$$

és ezért $\xi = \nu$. Ha $(j,\sigma) \in S_\delta$, akkor

$$(i,\mu)(j,\sigma) = (i,\mu)[(j,\nu)(j,\sigma)] = [(i,\mu)(j,\nu)](j,\sigma) = (k,\nu)(j,\sigma) = (k,\sigma)$$

amely azt mutatja, hogy k nem függ a ν-től. Így definiálhatunk egy $\alpha^{(i,\mu)}_{\delta,\gamma}$ függvényt L_δ-n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(i,\mu)(j,\nu) = (\alpha^{(i,\mu)}_{\delta,\gamma} j,\nu)\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ (j,\nu) \in S_\delta\ \gamma \geq \delta).$$

Ennek duálisaként, definiálhatunk egy $\beta^{(i,\mu)}_{\gamma,\delta}$ függvényt R_δ-n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(j,\nu)(i,\mu) = (j,\nu\beta^{(i,\mu)}_{\gamma,\delta})\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ (j,\nu) \in S_\delta\ \gamma \geq \delta).$$

Ez lehetővé teszi, hogy definiáljuk a következő függvényeket.

$$\alpha_{\delta,\gamma} : (i,\mu)\ \mapsto\ \alpha^{(i,\mu)}_{\delta,\gamma},\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ \gamma \geq \delta$$

$$\beta_{\gamma,\delta} : (i,\mu)\ \mapsto\ \beta^{(i,\mu)}_{\gamma,\delta},\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ \gamma \geq \delta.$$

(1) közvetlenül következik $\alpha^{(i,\mu)}_{\delta,\gamma}$ és $\beta^{(i,\mu)}_{\gamma,\delta}$ definíciójából. Legyen $(i,\mu) \in S_\gamma$ és $(j,\nu) \in S_\delta$. Akkor $(i,\mu)(j,\nu) = (k,\xi)$ valamely $(k,\xi) \in S_{\gamma\delta}$-ra. Legyen $\epsilon \leq \gamma\delta$ és legyen $(l,\eta) \in S_\epsilon$. Akkor

$$(\alpha^{(k,xi)}_{\epsilon,\gamma\delta} l,\eta) = (k,\xi)(l,\eta) = (i,\mu)(j,\nu)(l,\eta) = (\alpha^{(i,\mu)}_{\epsilon,\gamma}\alpha^{(j,\nu)}_{\epsilon,\delta} l,\eta)$$

Szerkesztés alatt

és így

$$\alpha_{\epsilon,\gamma\delta}^{(k,\xi)} = \alpha_{\epsilon,\gamma}^{(i,\mu)}\alpha_{\epsilon,\delta}^{(j,\nu)}.$$

Ebből következik a (2) formula; az $\epsilon = \gamma\delta$ választás mellett pedig az (1) formula. Ugyanebből adódik (3) első képlete, ha feltesszük, hogy $\epsilon < \gamma\delta$. A (2) és (3) második képlete az első képletek duálisai. A (2)-ből és (k, ξ) definíciójából adódik, hogy $(i, \mu)(j, \nu) = (i, \mu) * (j, \nu)$. Ezzel a tétel első részét bebizonyítottuk.

A fordított állítás bizonyítása egyszerű. □

Szerkesztés alatt

13. fejezet

Félcsoportalgebrák

Definíció 13.1 *Egy $\mathbb{F}$ test feletti algebrán olyan $\mathcal{A} = (A; +, \cdot)$ gyűrűt értünk, amely esetén $(A; +)$ vektortér $\mathbb{F}$ felett és tetszőleges $a, b \in A$ és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{F}$ esetén*

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$$

teljesül. Az algebra rendjén annak, mint $\mathbb{F}$ feletti vektortérnek a dimenzióját (azaz bázisának számosságát) értjük.

Ebben a jegyzetben mindvégig véges dimenziós algebrákkal fogunk foglalkozni.

Definíció 13.2 *Egy $\mathcal{A}$ algebra ideálján $\mathcal{A}$-nak egy olyan részhalmazát értjük, amely olyan altere $\mathcal{A}$-nak, mint vektortérnek, amely altér egyben ideálja $\mathcal{A}$-nak, mint gyűrűnek. Az $\mathcal{A}$ algebra egy $\mathcal{B}$ ideáljának k-dik hatványán (k egy pozitív egész) $\mathcal{A}$-nak azt az alterét értjük, amelyet a $\mathcal{B}$ elemeiből képezhető összes k-tényezős szorzatok halmaza generál, ez az altér egyben az $\mathcal{A}$ algebra ideálja.*

Definíció 13.3 *Egy $\mathcal{A}$ algebra $\mathcal{B}$ ideálját nílpotens ideálnak nevezzük, ha megadható olyan k pozitív egész szám, hogy $\mathcal{B}^k = \{0\}$. Egy $\mathcal{A}$ algebra összes nílpotens ideáljának unióját az algebra nilradikáljának nevezzük, és $\mathcal{R}$-rel jelöljük.*

Definíció 13.4 *Egy $\mathcal{A}$ algebra a elemét nílpotens elemnek nevezzük, ha megadható olyan n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 0$ teljesül. Az $a \in \mathcal{A}$ elemet valódi nílpotens elemnek nevezzük, ha minden $x \in \mathcal{A}$ elem esetén xa nílpotens*

Szerkesztés alatt

elem (ekkor ax is nilpotens, mert $(xa)^n = 0$-ból $(ax)^{n+1} = a(xa)^n x = 0$ következik).

Definíció 13.5 *Egy algebra a elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $a^2 = a$.*

Tétel 13.1 *Minden olyan véges dimenziós algebrában, amely tartalmaz legalább egy nem-nilpotens elemet, van legalább egy nullától különböző idempotens elem.*

Tétel 13.2 *Legyen $\mathcal{A}$ olyan véges dimenziós algebra, amelyben nem minden eleme nilpotens. Akkor $\mathcal{A}$ tetszőleges nem valódi a nilpotens eleméhez van olyan $e \neq 0 \in \mathcal{A}$ idempotens elem és olyan $x \in \mathcal{A}$ elem, hogy $ax = e$.*

qbf Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Akkor aA az $\mathcal{A}$ algebra egy részalgebrája. Ha ez nem tartalmaz idempotens elemet, a Tétel13.1 miatt minden eleme nilpotens. Ez viszont azt jelenti, hogy a valódi nilpotens elem. Tehát, ha a nem valódi nilpotens elem, akkor $a\mathcal{A}$ tartalmaz legalább egy e idempotens elemet, s ezért $ax = e$ teljesül valamely $x \in \mathcal{A}$ elemre. □

Tétel 13.3 *Véges dimenziós algebra valódi nilpotens elemeinek összege is valódi nilpotens.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra valódi nilpotens elemei. Tegyük fel, indirekt módon, hogy $a + b$ nem valódi nilpotens elem. Akkor a Tétel 13.2 miatt van $\mathcal{A}$-nak olyan e idempotens eleme, hogy valamely $x \in \mathcal{A}$ elemre

$$(a + b)y = ax + bx = e.$$

Az világos, hogy axés bx valódi nilpotens elemek. Így $eaxe$ és $ebxe$ nilpotens elemek. Ha n jelöli $eaxe$ nilpotenciájának fokát, akkor

$$0 = (eaxe)^n = (e - ebxe)^n = e - cbxe,$$

azaz

$$e = cbxe$$

teljesül valamely $c \in \mathcal{A}$ elemmel. Ez viszont ellentmondás, mert $cbxe$ valódi nilpotens elem, e pedig idempotens elem.

Tétel 13.4 *Véges dimenziós algebra nilradikálja megegyezik a valódi nilpotens elemeinek halmazával.*

Szerkesztés alatt

Bizonyítás. Legyen a egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra $\mathcal{R}$ nilradikáljának tetszőleges eleme. Akkor tetszőleges $x \in \mathcal{A}$ elem esetén xa benne van az $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}$ nilpotens radikáljában. Ha $\mathcal{C}^n = \{0\}$, akkor $(xa)^n = 0$. tehát a erősen nílpotens elem.

Fordítva, tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{A}$ egy erősen nílpotens elem. Akkor $\square$

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

14. fejezet

Félcsoportok mátrixreprezentációi

Szerkesztés alatt

Szerkesztés alatt

15. fejezet

Automataelméleti alkalmazások

Szerkesztés alatt