Határozzuk meg a következő A mátrix rangját a paraméter (paraméterek) függvényében:

96. Az első és a második sort felcserélve, majd az új mátrixban az első sor megfelelő többszörösét a többihez hozzáadva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & (1-\lambda^2) & (1-\lambda) & (1-\lambda^2) \\ 0 & (1-\lambda) & (\lambda-1) & (\lambda^2-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Az első oszlop (-1)-szeresét a harmadik oszlophoz, $(-\lambda)$-szorosát a második és a negyedik oszlophoz adva:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda^2) & (1-\lambda) & (1-\lambda^2) \\ 0 & (1-\lambda) & (\lambda-1) & (\lambda^2-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Jelöljük a legutóbbi mátrixot $\mathbf{B}$-vel. Ha $\lambda = 1$, akkor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tehát $\mathbf{B}$ rangja 1, és így $\mathbf{A}$ rangja is 1.
Ha $\lambda \neq 1$, akkor a 2. és 3. sort oszthatjuk $(1-\lambda)$-val, és így azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 1 & (1+\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Az 1., 3. és 4. oszlopból képzett determináns értéke 1, nemnulla, tehát $\mathbf{A}$ rangja 3.

97. Hasonló feladatokra érvényes elv, hogy ha valamelyik elem sorába és oszlopába is nullákat kívánunk behozni, úgy olyan elemet válasszunk, ha lehet, ami 1 vagy -1 és amelynek sorában és oszlopában sincsen paraméter. Legyen az első ilyen elem az 1. sor 2. eleme (ezt félkövér szám jelzi)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

A második ilyen elemnek választhatjuk a 2. sor 3. elemét:

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-15) & 0 & 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-15) & 0 & 0 & -1 & -15 \end{bmatrix}.$$

A következő ilyen elemnek a 3. sor 4. elemét célszerű választani:

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tehát a mátrix rang definíciója (**D 19.12**) szerint $\operatorname{rang} \mathbf{A} \geq 3$. A kérdés az, hogy kiválasztható-e nemnulla értékű negyedrendű determináns. Ez az utolsó oszlopot biztosan nem tartalmazhatja.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\cdot 1 = -\lambda+1.$$

Tehát, ha $\lambda \neq 1$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$, illetve $\lambda = 1$ esetén $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$.

98. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-3) & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & (b-3) \end{bmatrix}.$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-3) & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & (b-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{bmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tehát $\operatorname{rang} \mathbf{A} \geq 3$ minden a-ra és b-re.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & (b-7) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a$, így ha $a \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$.

Ha $a = 0$, akkor $\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{bmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{vmatrix} = 2\cdot(b-7)\cdot(b-8) \neq 0$, ha $b \neq 7$, és $b \neq 8$, és ekkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$. Ha $a = 0$ és $b = 7$, vagy $a = 0$ és $b = 8$, akkor $\mathbf{A}$-ból csak nulla értékű negyedrendű determinánsok választhatók ki, tehát $\operatorname{rang} \mathbf{A} \leq 3$, vagyis $\operatorname{rang} \mathbf{A} \geq 3$ miatt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$.

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

78. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **79.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, **80.** $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

81. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$, **82.** $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, **83.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

Megoldások:

78. T 20.9 alapján írjuk fel a mátrix karakterisztikus egyenletét:

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 3 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtése után a következőt kapjuk: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$.
Ennek gyökei a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.
A λ_1-hez tartozó $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$ sajátvektorra

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)x + 3y = 0 \\ x + (2-\lambda_1)y = 0, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $y = -x$, így tetszőleges $x \neq 0$-ra $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$. A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sajátvektorra hasonlóan adódik, hogy $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3x \\ x \end{bmatrix}$, ahol $x \neq 0$ tetszőleges.

79. A karakterisztikus egyenlet $(2-\lambda)^2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. A $\lambda = 2$-höz tartozó $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 0y = 0 \\ 0x + (2-\lambda)y = 0, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer adódik, amelynek bármely x, y számpár megoldása. Tehát a koordinátasík bármely nem nullvektora sajátvektor.

80. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$.

Mivel ennek nincsenek valós gyökei, ezért nincs sajátértéke a valós számok testében.

Ha a mátrixot úgy tekintjük, mint a komplex számok teste feletti mátrix, akkor a feladat megoldása:

A sajátértékek: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}i$.
A λ_1-hez tartozó $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$\begin{cases} \left(0 - (2+\sqrt{2}i)\right)x - 3y = 0 \\ 2x + \left(4 - (2+\sqrt{2}i)\right)y = 0; \end{cases}$$

ebből $x = \left(-1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)y$, így

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)y \\ y \end{bmatrix}, \quad y \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

A $\lambda = 2 - \sqrt{2}i$ esetében hasonló módon adódik:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)y \\ y \end{bmatrix}, \quad y \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

81. $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 14$, a λ_1-hez tartozó sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4t_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$.
Minthogy a mátrix szimmetrikus, a λ_2-höz tartozó sajátvektorokat a megfelelő egyenletrendszer megoldása helyett azon az alapon is megkaphatjuk, hogy a **T 20.13** főtengely tétel szerint a mátrixnak van $\mathbf{v}_1$-re merőleges sajátvektora. Így
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} t_2 \\ 4t_2 \end{bmatrix}$, $t_2 \neq 0$.

82. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$; $\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t_1, t_2 \neq 0$ tetszőleges.

83. $\lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$ tetszőleges
és
$\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$, $t_2 \neq 0$ tetszőleges.

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

90. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, **91.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, **92.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Megoldások:

90. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 + 14\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i\sqrt{14}$, $\lambda_3 = i\sqrt{14}$.
A sajátvektorok:
$\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$. $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{14} \cdot i \\ 13 \\ 2 - 3\sqrt{14} \cdot i \end{bmatrix}$, $t_2 \neq 0$.
$\mathbf{v}_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} 3 - 2\sqrt{14} \cdot i \\ 13 \\ 2 + 3\sqrt{14} \cdot i \end{bmatrix}$, $t_3 \neq 0$.
(Figyeljük meg, hogy a mátrix ferdén szimmetrikus, l. **D 20.10**, és minden sajátértéke **T 20.12**-el összhangban képzetes szám.)

91. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$; $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
A $\lambda_1 = 5$-höz tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$.

A $\lambda_2 = 1$-hez tartozó $\mathbf{v}_2$ sajátvektorok: $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, t_2 és t_3 egyszerre nem nulla, de egyébként tetszőleges.

92. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
A sajátvektorok: $\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

86. feladat:

Adja meg az A lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban és határozza meg az $A(\underline{a})$ vektort, ha A elforgatja a teret a z-tengely körül α szöggel, majd tükrözi a teret az xy-síkon. Az $\underline{a}$ vektor pedig az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor.

Megoldás: Az A lineáris leképezés két lineáris transzformáció szorzata. Ha ξ jelöli az xy-síkra való tükrözést, η pedig a z-tengely körüli α szöggel való forgatást, akkor $A = \xi\eta$. Így A mátrixa egyenlő a ξ mátrixának és η mátrixának szorzatával.

A ξ márixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az η mátrixa

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így az A mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A(\underline{a}) = \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \\ -1 \end{bmatrix}.$$

87. feladat:

Adja meg az A lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban és határozza meg az $A(\underline{a})$ vektort, ha A elforgatja a teret az x-tengely körül α szöggel, majd elforgatja a teret az y-tengely körül α szöggel. Az $\underline{a}$ vektor az $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ vektor, az α szög pedig $\frac{\pi}{6}$.

Megoldás: Az A lineáris leképezés két lineáris transzformáció szorzata. Ha ξ jelöli az y-tengely körüli, η pedig a x-tengely körüli α szöggel való forgatást, akkor $A = \xi\eta$. Így A mátrixa egyenlő a ξ mátrixának és η mátrixának szorzatával.

A ξ márixa

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Az η mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Így az A mátrixa

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin^2\alpha & sin\alpha cos\alpha \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ -sin\alpha & sin\alpha cos\alpha & cos^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Így

$$A(\underline{a}) = \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{6} & sin^2\frac{\pi}{6} & sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{6} \\ 0 & cos\frac{\pi}{6} & -sin\frac{\pi}{6} \\ -sin\frac{\pi}{6} & sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{6} & cos^2\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}.$$

88. feladat:

Adja meg az A lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban és határozza meg az $A(\underline{a})$ vektort, ha A elforgatja a teret az y-tengely körül α szöggel, majd elforgatja a teret az x-tengely körül α szöggel. Az $\underline{a}$ vektor az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor, az α szög pedig $\frac{\pi}{6}$.

Megoldás: Az A lineáris leképezés két lineáris transzformáció szorzata. Ha ξ jelöli az x-tengely körüli, η pedig a y-tengely körüli α szöggel való forgatást, akkor $A = \xi\eta$. Így A mátrixa egyenlő a ξ mátrixának és η mátrixának szorzatával. A számolást nem részletezve, az A mátrixa

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ sin^2\alpha & cos\alpha & -sin\alpha cos\alpha \\ -sin\alpha cos\alpha & sin\alpha & cos^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Innen pedig

$$A(\underline{a}) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

94. feladat:

Adja meg az A lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban, majd a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bázisban, ahol A a tér tetszőleges vektorát merőlegesen vetíti az

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{-z}{12}$$

egyenletű egyenesre!

Megoldás: Az egyenes egységnyi hosszúságú irányvektora az

$$\underline{e} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

vektor. A tér tetszőleges $\underline{r}$ vektora esetén

$$A(\underline{r}) = \underline{e}(\underline{e}\underline{r}) = (\underline{e} \circ \underline{e})(\underline{r}),$$

azaz az A lineáris leképezés megegyezik az $\underline{e} \circ \underline{e}$ diadikus szorzattal. Így az A mátrixa a standard bázisban:

$$\frac{1}{169} \begin{bmatrix} 9 & 12 & -36 \\ 12 & 16 & -48 \\ -36 & -48 & 144 \end{bmatrix}.$$

Ahhoz, hogy felírjuk az A lineáris leképezés mátrixát a

$$\mathcal{B}: \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bázisban, meg kell határozni annak a τ bázistranszformációnak a standard bázisbeli $\mathbf{T}$ mátrixát, amely a standard bázis vektoraihoz rendre a $\mathcal{B}$ bázis vektorait rendeli. Ez a mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa 1, inverze pedig

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így az A lineáris leképezés $\mathcal{B}$ bázisbeli $\mathbf{A}'$ mátrixa:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{169} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & -36 \\ 12 & 16 & -48 \\ -36 & -48 & 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{169} \begin{bmatrix} 64 & -48 & -36 \\ -176 & 132 & 99 \\ 48 & -36 & -27 \end{bmatrix}.$$