(1) Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját a definíció alpján! (Kommutatív gyűrű elemeiből képezett márix rangján a nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximumát értjük. Test elemeiből képezett mátrix rangjának kétféle definíciója ekvivalens, azaz a nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximuma megegyezik a mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangjával, ami nem más, mint az általuk kifeszített altér dimenziója, ami megegyezik a közöttük lévő lineárisan függetlenek számának maximumával.)

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3. \end{bmatrix}$$

  Megoldás: Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa -12, ezért rangja egyenlő 3-mal.

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3. \end{bmatrix}$$

  Megoldás: Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa -12, ezért rangja egyenlő 3-mal.

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2. \end{bmatrix}$$

  Megoldás: Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 0 és van másodrendű nem nulla aldeterminánsa (pl. a bal felső sarokban álló $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ aldetermináns), ezért $\mathbf{A}$ rangja egyenlő 2-vel.

(2) Elemi átalakítások segítségével számítsuk ki az alábbi márixok rangját! (Hozzuk olyan alakra a mátrixokat, amelyben a főátlón kivül minden elem nulla. Ekkor a rang megegyezik a főátlóban álló nem nulla elemek számával.)

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1. \end{bmatrix}$$

  Megoldás:

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2.

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i. \end{bmatrix}$$

  Megoldás:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

  $$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  A mátrix rangja 2.

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 4.

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 5 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 4.

(3) Az a és b paraméterek milyen értékei mellett lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2, 3?

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 0 & 5. \end{bmatrix}$$

  Megoldás: Mivel a mátrix bal felső sarkában lévő

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

  aldetermináns értéke -5, ezért a mátrix rangja legalább kettő. A mátrix determinánsa $b(1+2a)-25$. Így a 2 vagy 3 attól függően, hogy $b(1+2a)-25=0$ vagy $b(1+2a)-25 \neq 0$.

(4) Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4. \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 1, így létezik az $\mathbf{A}$ inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 42 & -11 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -49 & 13 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

(5) Elemi sorátalakítások alkalmazásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3. \end{bmatrix}$$

Megoldás:
Egy $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A}^{-1} = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ inverzére

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \{\mathbf{A}\underline{u}, \mathbf{A}\underline{v}, \mathbf{A}\underline{w}\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} = \mathbf{E}$$

teljesül, így az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix oszlopvektorai az

$$\mathbf{A}\underline{u} = \underline{e}_1,$$

$$\mathbf{A}\underline{v} = \underline{e}_2,$$

$$\mathbf{A}\underline{w} = \underline{e}_3$$

lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ezt a három egyenletrendszert együttesen is megoldhatjuk Gauss módszerrel, mivel a mátrixaik közösek. Kiindulunk a

$$[\mathbf{A}|\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$$

kibővitett mátrixból, és elemi sorműveleteket alkalmazunk mindaddig, amíg az $\mathbf{A}$ mátrix helyébe az egységmátrix nem kerül. Ekkor az

$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$$

helyére kerülő mátrix lesz az $\mathbf{A}$ mátrix inverze. Nézzük a megoldást!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right].$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(5) Mátrix inverzének segítségével oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

- $$\begin{array}{ccccc} 5x_1 & 5x_2 & & +2x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = -1 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0. \end{array}$$

  Megoldás: A lineáris egyenletrendszer mátrixa:

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

  a konstansok oszlopvektora pedig

  $$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel a vizsgált lineáris egyenletrendszer

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{x}$$

alakban írható, ahol

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, ezért az $\mathbf{A}^{-1}$ inverz mátrixszal balról szorozva,

$$\underline{x} = \mathbf{A}^{-1}\underline{b}$$

adódik. Képezzük az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & | & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & | & 1 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1/9 & -8/9 & 1/3 & 10/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 4/9 & 14/9 & -1/3 & -22/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1/3 & -5/3 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Így

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & -8/9 & 1/3 & 10/9 \\ 4/9 & 14/9 & -1/3 & -22/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/3 & -5/3 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján

$$\underline{x} = \mathbf{A}^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} -1/9 & -8/9 & 1/3 & 10/9 \\ 4/9 & 14/9 & -1/3 & -22/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/3 & -5/3 & 0 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

(6) A Cramer-szabály alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

- $$\begin{array}{llll} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 4 \\ 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = 11 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 11 \end{array}$$

  Megoldás: A lineáris egyenletrendszer mátrixa:

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

  a konstansok oszlopvektora pedig

  $$\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

  $$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

  $$det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180,$$

  $$det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

  $$det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

  Így

  $$x_1 = \frac{det(\mathbf{A}_1)}{det(\mathbf{A})} = \frac{180}{60} = 3,$$

$$x_2 = \frac{det(\mathbf{A}_2)}{det(\mathbf{A})} = \frac{60}{60} = 1,$$

$$x_3 = \frac{det(\mathbf{A}_3)}{det(\mathbf{A})} = \frac{60}{60} = 1.$$