(1) Végezzük el az alábbi műveleteket, ha azok végrehajthatók!

- $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: Az összeg:
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  Megoldás: A végeredmény:
  $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- $$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A végeredmény:
  $$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: Mivel egy 2×3 típusú mátrixot csak egy $3 \times k$-típusú mátrixszal szorazhatunk, ezért ez a kijelölt művelet nem végezhető el.

- $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A szorzat 3×1-típusú:

  $$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: Mivel az egyes sorokban $d = 1$ differenciájú számtani sorozatok állnak, ezért a

  $$k + (k+1) + \cdots (k+n-1) = \frac{n(n+2k-1)}{2}$$

  képlet szerint a megoldás

  $$\begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+3)}{2} \\ \vdots \\ \frac{n(3n-1)}{2} \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A szorzat egy 1×1-típusú mátrix (azaz egyetlen szám): -2.

- $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A szorzat egy 3×3-típusú mátrix:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A szorzat egy 1×3-típusú mátrix:

  $$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás: A szorzás nem végezhető el.

(2) Bizonyítsuk be, hogy minden másodrendű $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix kielégíti az

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

egyenletet, amin azt kell érteni, hogy x helyébe az $\mathbf{A}$ mátrixot, konstans helyébe az egységmátrix konstansszorosát, 0 helyébe a nullmátrixot helyettesítve, az egyenlőség igaz lesz.

Megoldás:

$$\mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad-bc)\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (ad - bc) & 0 \\ 0 & (ad - bc) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd & bc + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Mutassuk meg, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix},$$

ahol F_n az n-edi Fibonacci-számot jelöli, melynek rekurzív definíciója a következő: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ha $n \geq 1$.

Mindkét megoldáshoz teljes indukciót alkalmazunk.

Az első egyenlőség bizonyítása: Ha $n = 1$, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $n = 1$-re igaz az állítás.

Indukciós feltétel: n-re igaz az állítás, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás $(n+1)$-re:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A második egyenlőség bizonyítása: Ha $n = 1$, akkor

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix}.$$

Indukciós feltétel: n-re igaz az állítás:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás $(n+1)$-re:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

(4) Hozzuk sorlépcsős alakra a következő mátrixokat:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Megoldás:
  $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Megoldás:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

(5) Gauss-módszerrel oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

- $$\begin{array}{rrrrl} 5x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 7 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & -6x_3 & +5x_4 & = 0. \end{array}$$

Megoldás: A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Mivel a kibővített mátrix tartalmaz egy [0000|5] alakú sort, ezért a lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

- $$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 2 \\ -2x_1 & -2x_2 & -6x_3 & -8x_4 & & = 10 \\ 2x_1 & 2x_2 & -3x_3 & -x_4 & +3x_5 & = 17 \\ -x_1 & -x_2 & x_3 & & +4x_5 & = 9 \\ 3x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +9x_4 & +8x_5 & = 15 \end{array}$$

Megoldás: A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5/3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/10 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13/6 & 13/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A sorlépcsős alakhoz tartozó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 2 \\ & & 2x_3 & +2x_4 & -x_5 & = -7 \\ & & & & 3x_5 & = 9. \end{array}$$

amelyben a kötött változók: x_1, x_3, x_5, a szabad változók: x_2, x_4. Ennek megfelelő átrendezés után:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_3 & +x_5 & = & 2 - x_2 - 2x_4 \\ & 2x_3 & -x_5 & = & -7 - 2x_4 \\ & & 3x_5 & = & 9. \end{array}$$

Megoldás után a következő megoldásvektort kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 - x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -2 - x_4 \\ x_4 \\ 3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 7 \\ x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7. \end{array}$$

Megoldás: A kibővített mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -7 & 5 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \\ 0 & -7 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \\ 0 & -7 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 9 \\ 0 & 0 & 5 & | & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0. \end{bmatrix}$$

A sorlépcsős alakhoz tartozó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ & x_2 & & = & 2 \\ & & x_3 & = & 3, \end{array}$$

melynek megoldásvektora

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(6) A definíció segítségével számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

- $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0. \end{vmatrix}$$

  Megoldás:

  $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = 41.$$

- $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4. \end{vmatrix}$$

  Megoldás:

  $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4. \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

(7) Egy megfelelően választott sora vagy oszlopa szerint fejtsük ki az alábbi determinánsokat!

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1. \end{vmatrix}$$

Megoldás: A második sor szerinti kifejtést választjuk, majd a harmadrendű determinánst az első oszlopa szerint fejtjük ki.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1. \end{vmatrix}$$

  Megoldás: A 4. oszlop szerinti kifejtést alkalmazzuk, a negyedrendű, majd a harmadrendű determinánst is a második oszlopa szerint fejtjük ki.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -75.$$

(8) Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10. \end{vmatrix}$$

  Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64. \end{vmatrix}$$

  Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

Megjegyzés: Az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst Vandermonde-determinánsnak nevezzük, melynek értéke egyenlő a

$$\Pi_{1 \le i < j \le n}(a_j - a_i) =$$

$$= (a_2 - a_1)[(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)] \cdots [(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \cdots (a_n - a_1)]$$

szorzattal. Az előző példában szereplő determináns is Vandermonde-determináns, amelyben $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$. Így a determináns értéke

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12,$$

összangban a fenti megoldás végeredményével.