2. gyakorlat

(1) Mutassuk meg, hogy egy m-dimenziós (m egy pozitív egész szám) vektortér vektorrendszere akkor és csak akkor bázis, ha minimális generátorrendszere a vektortérnek!

Megoldás: Ha a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ bázisa egy vektortérnek, akkor (definíció szerint) a vektortér minden vektora egyértelműen előállítható a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorok lneáris kombinációjaként. Tehát $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ a vektortér egy generátorrendszere. Ha $m = 1$, akkor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorrendszer csak egy vektorból áll, és így minimális generátorrendszer, mert a vektorrendszerben levő egyetlen vektor elhagyásával a vektorrenszerből egy üres halmaz keletkezik. Ha $m \geq 2$, akkor egyikük sem állítható elő a a renszerhez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként, így bármelyiküket is hagyjuk ki a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ bázisból, az nem állítható elő a többi lineáris kombinációjaként, azaz az el nem hagyott vektorokból álló vektorrendszer mát nem generátorrendszer. Tehát a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ bázis minimális generátorrendszer.

Fordítva, tegyük fel, hogy a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorrendszer minimális generátorrendszer. Ekkor a vektortér minden vektora előállítható a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ha lenne olyan $\underline{a}$ vektor, amely kétféleképpen is előállítható lenne a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz léteznének olyan α_i és β_i ($i = 1, 2, \ldots, m$ skalárok, hogy valamely j indexre $\alpha_j \neq \beta_j$, továbbá

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m = \beta_1 \underline{b}_1 + \cdots + \beta_m \underline{b}_m$$

teljesülne. Ha $m = 1$, akkor ezen utóbbi egyenlőség

$$\alpha_1 \underline{b}_1 = \beta_1 \underline{b}_1$$

alakú lenne, amelyben $\alpha_1 \neq \beta_1$. Ebből

$$(\alpha_1 - \beta_1)\underline{b}_1 = \underline{0}$$

adódna. Innen $\underline{b}_1 = \underline{0}$ következne. Ebben az esetben a vektortér csak a nullvektorból állna, és ezért dimenziója 0 lenne. A feltétel miatt ez nem lehet. Ha $m \geq 2$, akkor

$$\underline{b}_j = \frac{1}{\alpha_j - \beta_j}[(\beta_1 - \alpha_1)\underline{b}_1 + \cdots + (\beta_{j-1} - \alpha_{j-1})\underline{b}_{j-1} +$$

$$+(\beta_{j+1}-\alpha_{j+1})\underline{b}_{j+1}+\cdots+(\beta_m-\alpha_m)\underline{b}_m].$$

Tehát a $\underline{b}_j$ vektor előállítható a rendszerhez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként, így a vektortér minden vektora előáll a

$$\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{j-1},\underline{b}_{j+1},\ldots,\underline{b}_m$$

vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a vizsgált $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m$ vektorrendszer minimális generátorrendszer. Az ellentmondás onnan ered, hogy feltettük azt, hogy van olyan $\underline{a}$ vektor, amely kétféleképpen is előállítható a $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként. Így a vektortér minden vektora egy és csak egyféleképpen állítható elő a $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz a $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m$ minimális generátorrendszer szükségképpen bázisa is a vektortérnek.

(2) Mutassuk meg, hogy egy n-dimenziós vektortérben minden független vektorrendszerben legfeljebb n vektor van.

Megoldás: Ha egy vektortér n-dimenziós, akkor a vektortér bázisaiban lévő vektorok száma n. Mivel a bázis minimális generátorrenszer, ezért a vektortér minden független vektorrendszerében (az előadás egyik tétele alapján) legfeljebb n vektor van.

(3) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{e}$ térbeli egységvektor esetén az a leképezés, amely minden $\underline{r}$ térbeli vektorhoz $\underline{r}$-nek az $\underline{e}$ egyenesére eső merőleges vetületét rendeli, a térbeli vektorok vektorterének önmagába való lineáris leképezése!

Megoldás: A Matematika A1a tantárgy keretén belül tanultak alapján, egy $\underline{r}$ térbeli vektornak egy $\underline{e}$ egységvektor egyenesére eső $\varphi(\underline{r})$ merőleges vetületét a

$$\varphi(\underline{r})=(\underline{er})\underline{e}$$

képlettel adhatjuk meg. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok, α és β pedig tetszőleges valós számok! Akkor

$$\varphi(\alpha\underline{a}+\beta\underline{b})=(\underline{e}(\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}))\,\underline{e}=$$

$$=(\alpha(\underline{ea})+\beta(\underline{eb}))\,\underline{e}=$$

$$= \alpha\left((\underline{ea})\underline{e}\right) + \beta\left((\underline{eb})\underline{e}\right) =$$
$$= \alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b}).$$

(4) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$ rögzített vektorok esetén a

$$\varphi : \underline{r} \mapsto \underline{a}(\underline{br})$$

módon definiált leképezés az R^n vektortérnek önmagába való lineáris leképezése!

Megoldás: Legyenek $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ tetszőleges vektorok és ξ, η tetszőleges valós számok. Akkor

$$\varphi(\xi\underline{x} + \eta\underline{y}) = \underline{a}\left(\underline{b}(\xi\underline{x} + \eta\underline{y})\right) =$$
$$= \underline{a}\left(\xi(\underline{bx}) + \eta(\underline{by})\right) =$$
$$= \xi\left(\underline{a}(\underline{bx})\right) + \eta\left(\underline{a}(\underline{by})\right) =$$
$$= \xi\varphi(\underline{x}) + \eta\varphi(\underline{y}).$$

(5) Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. Mutassuk meg, hogy V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ_1 és φ_2 lineáris leképezése esetén a

$$(\varphi_1 + \varphi_2) : \underline{r} \mapsto \varphi_1(\underline{r}) + \varphi_2(\underline{r})$$

módon definiált leképezés (azaz φ_1 és φ_2 összege) lineáris leképezése V_1-nek V_2-be!

Megoldás:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) =$$
$$\varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) + \varphi_2(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) =$$
$$\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b}) + \alpha\varphi_2(\underline{a}) + \beta\varphi_2(\underline{b}) =$$
$$\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \alpha\varphi_2(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b}) + \beta\varphi_2(\underline{b}) =$$
$$= \alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{a}) + \beta(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{b}).$$

(6) Legyenek V_1, V_2 és V_3 ugyanazon F test feletti vektorterek. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varphi_1 : V_1 \to V_2$ és $\varphi_2 : V_2 \to V_3$ lineáris leképezések esetén a

$$(\varphi_2\varphi_1) : \underline{r} \mapsto \varphi_2(\varphi_1(\underline{r}))$$

módon definiált leképezés (φ_2 és φ_1 szorzata) lineáris leképezése V_1-nek V_3-ba!

Megoldás:

$$(\varphi_2\varphi_1)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})) =$$
$$\varphi_2(\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b})) = \alpha\varphi_2(\varphi_1(\underline{a})) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\underline{b})) =$$
$$= \alpha(\varphi_2\varphi_1)(\underline{a}) + \beta(\varphi_2\varphi_1)(\underline{b}).$$

(7) Mutassuk meg, hogy az R^n vektortér tetszőleges W altere esetén az R^n vektortér alterét alkotja mindazon R^n-beli vektorok $W^\perp$ halmaza, amely vektorok a W altér minden vektorára megőlegesek! Mutassuk meg, hogy $W \cap W^\perp = \underline{0}$!

Megoldás: Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ a $W^\perp$ tetszőleges elemei. Akkor minden $\underline{w} \in W$ vektorra $\underline{aw} = 0$ és $\underline{bw} = 0$. Legyenek α és β tetszőleges valós számok. Akkor

$$(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})\underline{w} = \alpha(\underline{aw}) + \beta(\underline{bw}) = 0.$$

Tehát $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W^\perp$, és így $W^\perp$ az R^n vektortér egy altere.

Tegyük fel, hogy $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \in W \cap W^\perp$. Akkor

$$0 = \underline{aa} = a_1^2 + \cdots + a_n^2,$$

amiből $\underline{a} = \underline{0}$ következik.

(8) Mutassuk meg, hogy ha $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az R^n vektortér egy W alterének egy bázisa, akkor R^n egy vektora akkor és csak akkor van benne a $W^\perp$ altérben, ha merőleges minden egyes bázisbeli vektorra.

Megoldás: Ha $\underline{b} \in W^\perp$, akkor $\underline{b}$ merőleges a bázisbeli vektorok mindegyikére. Fordítva, ha merőleges a bázisbeli vektorok mindegyikére, akkor W tetszőleges $\underline{a}$ esetén (mivel $\underline{a}$ előáll

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m$$

alakban) kapjuk, hogy

$$\underline{ba} = \alpha_1 \underline{bb}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{bb}_m = 0.$$

Tehát $\underline{b} \in W^\perp$.

(9) Mutassuk meg, hogy az R^3 vektortérnek az R^2 vektortérbe való $\varphi : [x, y, z] \mapsto [x - y + z, x + 3y - 5z]$ leképezése lineáris! Adjuk meg a φ képterének és nullterének a dimenzióját!

Megoldás: Jelölje egy $\underline{r}$ térbeli vektor három koordinátáját x, y, z, azaz legyen $\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Akkor

$$\varphi(\underline{r}) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ x + 3y - 5z \end{bmatrix}.$$

Így tetszőleges

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

vektorok és tetszőleges ξ_1, ξ_2 valós számok esetén

$$\varphi(\xi_1 \underline{r}_1 + \xi_2 \underline{r}_2)) = \begin{bmatrix} (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) - (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2) + (\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2) \\ (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) + 3(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2) - 5(\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \xi_1 \begin{bmatrix} x_1 - y_1 + z_1 \\ x_1 + 3y_1 - 5z_1 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} x_2 - y_2 + z_2 \\ x_2 + 3y_2 - 5z_2 \end{bmatrix} = \xi_1 \varphi(\underline{r}_1) + \xi_2 \varphi(\underline{r}_2).$$

A φ leképezés magtere (azaz $Ker\varphi$) azon $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vektorok halmaza, amelyekre az $\begin{bmatrix} x-y+z \\ x+3y-5z \end{bmatrix}$ vektor a nullvektor, azaz

$$\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 0 \\ x & +3y & -5z & = & 0. \end{array}$$

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt:

$$\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 0 \\ & +4y & -6z & = & 0. \end{array}$$

A z változó segítségével kifejezhetjük ebből az y-t és az x-et:

$$y = \frac{3}{2}z, \quad x = \frac{5}{2}z.$$

Így $\underline{r} \in Ker\varphi$ akkor és csak akkor ha $\underline{r} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} z$. Tehát a $Ker\varphi$ dimenziója 1. A dimenziótétel miatt az $Im\varphi$ dimenziója 2.

(10) Adjuk meg az R^3 vektortér $[1, -1, 1]$ és $[1, 3, -5]$ vektoraira merőleges vektorok alterének dimenzióját!

Megoldás: Mivel a megadott két vektor nem egyállású, ezért mindkét vektorra merőleges vektorok a két vektor vektori szorzatával párhuzamos térbeli vektorok; ezek egy 1-dimenziós alteret alkotnak.

(11) Tetszőleges gyűrű feletti négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix esetén határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix nyomát!

Megoldás. Ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Így az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szorzat főátlójában álló i-dik elem (azaz az i-dik sor i-dik oszlopának eleme) egyenlő a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

szorzatösszeggel. Így az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix nyoma egyenlő a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right)$$

összeggel, ami nem más, mint az $\mathbf{A}$ összes elemének négyzetösszege.

Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szorzat főátlójában álló i-dik elem (azaz az i-dik sor i-dik oszlopának eleme) egyenlő a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

szorzatösszeggel. Így az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix nyoma egyenlő a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \right)$$

összeggel, ami nem más, mint az $\mathbf{A}$ mátrix összes elemének négyzetösszege. Így

$$tr\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = tr\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right).$$

Ebből

$$tr\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = tr\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) - tr\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = 0.$$