(1) Egyes függvényhalmazokon az

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

integrállal definiált un. konvolúció egy művelet, azaz tetszőleges $f, g \in \Lambda$ esetén $f * g \in \Lambda$. Mutassuk meg, hogy ez a művelet kommutatív!

Megoldás:

Az integrálban $t$ a független változó. Alkalmazzuk az

$$u = x - t$$

helyettesítést! Ekkor

$$x \leq u \leq 0.$$

Mivel

$$t = x - u,$$

ezért

$$\frac{dt}{du} = -1.$$

Így

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt =$$

$$= \int_x^0 f(x-u)g(u)(-1)du =$$

$$\int_0^x g(u)f(x-u)du = (g \star f)(x).$$

Nagy Attila

(2) Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt a szokásos összeadásra és szorzásra nézve:

$$A = \{a + bi : a, b \text{ egész számok}\},$$

$$B = \{a + bi : a, b \text{ egész számok}, ab = 0\}?$$

Megoldás:

Az 1. rész megoldása: Legyenek a $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ komplex számok az $A$ halmaz tetszőleges elemei. Akkor ezen komplex számok valós részei és képzetes részei (azaz az $a, b, c, d$ számok) egész számok. Mivel

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

valamint $a + c$ és $b + d$ egész számok, ezért $z_1 + z_2 \in A$. Mivel a komplex számok között értelmezett összeadás asszociatív, ezért asszociatív az $A$ halmaz elemei között is. $A$-nak van neutrális eleme az összeadásra nézve; ez a $0 + 0i$ komplex szám. Tetszőleges $z = a + bi \in A$ komplex szánnak a $-z = -a - bi \in A$ komplex szám az ellentettje, ezért $A$ a komplex számok összeadására nézve csoport. Mivel az összeadás kommutatív, ezért $A$ kommutatív csoportot alkot az összeadásra nézve.

Legyenek a $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ komplex számok az $A$ halmaz tetszőleges elemei. Akkor ezen komplex számok valós részei és képzetes részei (azaz az $a, b, c, d$ számok) egész számok. Mivel

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

valamint $ac - bd$ és $ad + bc$ egész számok, ezért $z_1 z_2 \in A$. Mivel a komplex számok között értelmezett szorzás asszociatív, ezért asszociatív az $A$ halmaz elemei között is. Tehát $A$ félcsoportot alkot a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Mivel a komplex számok halmazán a szorzás disztributív az összeadásra nézve, ezért ez teljesül az $A$-hoz tartozó komplex számok esetén is. Tehát $A$ gyűrű a komplex számok szokásos összeadására és szorzására nézve. Mivel a szorzás kommutatív, ezért $A$ kommutatív gyűrű. Mivel az 1 komplex szám benne van $A$-ban, ezért $A$ egységelemes kommutatív gyűrű.

Nagy Attila

A 2. rész megoldása: Világos, hogy $B \subseteq A$. Az is világos, hogy $z = a + bi \in B$ akkor és csak akkor, ha $z = a$ vagy $z = bi$, azaz $B$ a valós tengelyen és a képzetes tengelyen lévő komplex számok összessége. Mivel pl. $2 \in B$ és $3i \in B$, de ezek összege $2 + 3i \notin B$, ezért a komplex számok szokásos összeadása nem művelet a $B$ halmazon (ahhoz ugyanis az kellene, hogy bármely két $B$-beli elem összege is $B$-ben legyen), és így $B$ nem lehet gyűrű, mert a gyűrű definíciójában szereplő feltételek közül már egy nem teljesül. A többi hiába teljesülne, a válasz az, hogy $B$ nem gyűrű.

Nagy Attila

(3) Határozzuk meg a $(\mathbb{Z}_6; +, \cdot)$ gyűrű azon elemeit, amelyeknek van reciproka! Adjuk meg a $-3$ és $-5$ elemeket is!

Megoldás:

A $\mathbb{Z}_6$ gyűrű Cayley-féle művelettáblázatai:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

és

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

A bal oldali táblázatból jól látható, hogy $-3 = 3$ és $-5 = 1$. A jobb oldali táblázatból pedig kiolvasható, hogy az 1-nek és az 5-nek van reciproka. Az 1 reciproka önmaga, és $\frac{1}{5} = 5$, azaz az 5 reciproka is önmaga.

Megjegyzés: A $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben egy $k$ elemnek akkor és csak akkor van reciproka, ha relatív prím az $m$-hez, azaz $lnko(k, m) = 1$.

Nagy Attila

(4) Adjuk meg a $(Z_7; +, \cdot)$ test nem nulla elemeinek ellentettjeit és inverzeit (reciprokait)!

Megoldás:

A $\mathbb{Z}_m$ gyűrű akkor és csak akkor test, ha $m$ prímszám. Így $\mathbb{Z}_7$ test. A $\mathbb{Z}_7$ Cayley-féle művelettáblázatai:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

és

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

A nem nulla elemek ellentettjei:

$$-1 = 6,\ -2 = 5,\ -3 = 4,\ -4 = 3,\ -5 = 2,\ -6 = 1.$$

A nem nulla elemek reciprokai:

$$1/1 = 1,\ 1/2 = 4,\ 1/3 = 5,\ 1/4 = 2,\ 1/5 = 3,\ 1/6 = 6.$$

Nagy Attila

(5) Adjuk meg a $(Z_3; +, \dot{})$ test együtthatóival képezett

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 1$$

polinom $Z_3$-beni zérushelyeit! Végezzük el az $f(x)$ polinomnak a $g(x) = x - 1$ polinommal való maradékos osztását (a $Z_3$ testben)!

Megoldás:

$\mathbb{Z}_3$ test, ezért alkalmazhatjuk a Horner-módszert.

Mivel

| | 1 | −2 | 0 | 2 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

ezért az 1 zérushelye a polinomnak.

Mivel

| | 1 | −2 | 0 | 2 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |

ezért a 2 nem zérushelye a polinomnak.

A maradékos osztás:

| | |
|---|---|
| $x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 1 :$<br>$x^5 - x^4$ | $x - 1 \quad = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ |
| $-x^4 + 2x^2 - 1$<br>$-x^4 + x^3$ | |
| $-x^3 + 2x^2 - 1$<br>$-x^3 + x^2$ | |
| $x^2 - 1$<br>$x^2 - x$ | |
| $x - 1$<br>$x - 1$ | |
| $0$ | |

Nagy Attila

(6) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges gyűrű 0 nullelemére és tetszőleges $r$ elemére $0r = r0 = 0$ teljesül!

Megoldás:

$$0r = (0+0)r = 0r + 0r.$$
$$0r + (-0r) = (0r + 0r) + (-0r) = 0r + (0r + (-0r)).$$
$$0 = 0r + 0 = 0r.$$

Nagy Attila

(7) Bizonyítsuk be, hogy a térbeli vektorok vektori szorzása nem asszociatív művelet!

Megoldás:

$$(\underline{i} \times \underline{i}) \times \underline{j} = \underline{0}.$$
$$\underline{i} \times (\underline{i} \times \underline{j}) = \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}.$$

Nagy Attila

(8) Döntsük el, hogy az $\underline{a} = [1, 2, -3]$, $\underline{b} = [1, 1, 2]$ és $\underline{c} = [3, 5, -1]$ térbeli vektorok lineárisan függetlenek-e!

Megoldás: Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok (definíció szerint) akkor lineárisan függetlenek, ha az

$$x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c} = \underline{0}$$

egyenlőségből

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

következik.

$x_1, x_2, x_3$ akkor és csak akkor megoldása az

$$x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c} = \underline{0}$$

egyenletnek, ha megoldása az

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek.

Vonjuk ki a második egyenletből az első 2-szeresét, a harmadikhoz pedig adjuk hozzá az első 3-szorosát. A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & 5x_2 & +7x_3 & = & 0 \end{array}$$

Adjuk a harmadik egyenlethez a második 5-szörösét:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 0$. Ennek alapján a második egyenletből $x_2 = 0$ adódik. Végül, az első egyenletből $x_1 = 0$. Thehát a vizsgált $\underline{a} = [1, 2, -3]$, $\underline{b} = [1, 1, 2]$ és $\underline{c} = [3, 5, -1]$ térbeli vektorok lineárisan függetlenek.

Nagy Attila

(9) Vektoralgebrai eszközökkel mutassuk meg, hogy a paralelogramma átlói felezve metszik egymást!

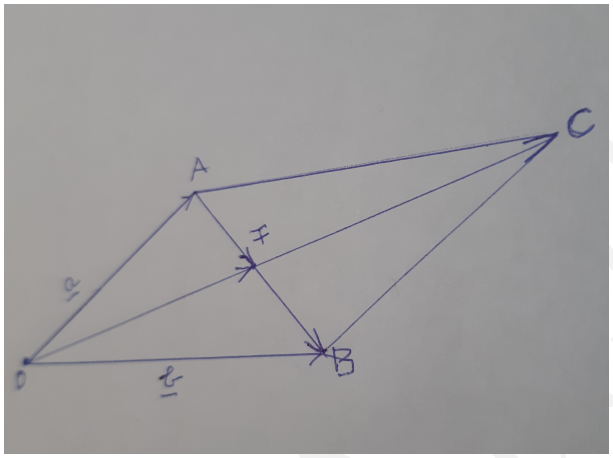


Figure 1: Paralelogramma átlói

$$\overrightarrow{OF} = \alpha \overrightarrow{OC}$$

és

$$\overrightarrow{AF} = \beta \overrightarrow{AB}.$$

Azt kellene megmutatnunk, hogy $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Mivel

$$\overrightarrow{OC} = \underline{a} + \underline{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a},$$

ezért

$$\underline{a} + \beta(\underline{b} - \underline{a}) = \overrightarrow{OF} = \alpha(\underline{a} + \underline{b}).$$

Ebből

$$(1 - \beta - \alpha)\underline{a} + (\beta - \alpha)\underline{b} = \underline{0}$$

adódik. Mivel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok nem egyállásúak, ezért lineárisan függetlenek, és így a lineáris kombinációban szereplő együtthatók 0-val egyenlőek, azaz

$$\begin{array}{rrcl} \alpha & +\beta & = & 1 \\ -\alpha & +\beta & = & 0 \end{array}$$

melynek megoldása $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Nagy Attila

(10) Bontsuk fel az $\underline{a} = [1, 0, -2]$ térbeli vektort a $\underline{b} = [1, 1, 2]$ vektorra merőleges és a $\underline{b}$-vel párhuzamos vektorok összegére!

Megoldás:

Jelölje $\underline{e}$ a $\underline{b}$ vektorral egyező állású egységvektort, azaz

$$\underline{e} = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, 1, 2].$$

Az $\underline{a}$ vektornak az $\underline{e}$ vektorra eső előjeles merőleges vetülete

$$\underline{a}^T = (\underline{a}\underline{e})\underline{e} = -\frac{1}{2}[1, 1, 2].$$

Legyen

$$\underline{c} = \underline{a} - \underline{a}^T = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1].$$

Világos, hogy

$$\underline{a} = \underline{a}^T + \underline{c},$$

ahol $\underline{a}^T$ párhozamos a $\underline{b}$ vektorral, a $\underline{c}$ vektor pedig merőleges a $\underline{b}$ vektorra. Tehát a megoldás:

$$\underline{a}^T = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1] \quad \text{és} \quad \underline{c} = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1].$$

Nagy Attila

(11) Mutassuk meg, hogy az $R^n$ vektortérben bármely, a nullvektort nem tartalmazó, páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszere lineárisan független!

Megoldás: Legyen

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$$

az $R^n$ vektortérnek olyan vektorrendszere, amely nem tartalmazza a nullvektort, és páronként merőleges vektorokból áll.

Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{a}_k = \underline{0}.$$

Szorozzuk meg skalárisan az egyenlőség mindkét oldalát az $\underline{a}_1$ vektorral. Mivel

$$\underline{a}_1 \underline{a}_j = 0$$

minden $j = 2, \ldots, k$ indexre, ezért

$$\alpha_1 |\underline{a}_1|^2 = 0$$

adódik. Mivel $|\underline{a}_1| \neq 0$, ezért $\alpha_1 = 0$. Hasonlóan igazolható, hogy minden együttható nulla. Tehát az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer lineárisan független.

Nagy Attila