Feladatok 1.

1. A teljes indukció alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $h > -1$ valós szám és tetszőleges n nemnegatív egész esetén
$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy

   (a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

   (b)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

3. A teljes indukció alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész szám és tetszőleges a, b valós számok esetén
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

6. Vektoralgebrai eszközökkel mutassuk meg, hogy a paralelogramma átlói felezve metszik egymást!

7. Mutassuk meg, hogy ha a tér egy O pontjából egy szakasz A és B végpontjába mutató vektorok $\underline{a}$ és $\underline{b}$, és P a szakasz olyan pontja, amelyre $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$, akkor az O-ból P-be mutató $\underline{p}$ vektorra
$$\underline{p} = \frac{1}{n+m}(n\underline{a} + m\underline{b})$$
teljesül.

8. Vektoralgebrai eszközökkel mutassuk meg, hogy egy háromszög súlyvonalai egy pontban, az oldalakhoz közelebbi harmadolópontokban metszik egymást!