BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Csató Tamásné

MATEMATIKA PÉLDATÁR
V.
ALGEBRA

Szerkesztette:
Antos Péter

Műegyetemi Kiadó, 2002.

Jelmagyarázat

A □-be helyezett sorszámú feladatokhoz részletes megoldás, a O-rel keretezett sorszámúakhoz útmutatás található a "Megoldások" részben. A ! a feladat sorszáma után a nehezebb feladatot jelöli.

Szerkesztette:

Antos Péter

Szerző:

Csató Tamásné

(Hetedik utánnyomás)

Azonosító: **051400**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu Istvan
Terjedelem: 10,5 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0028-02

TARTALOMJEGYZÉK

FELADATOK

I. TÉRVEKTOROK

$\boxed{1.}$ Megadható-e két azonos abszolutértékü vektor ugy, hogy összegük abszolutértéke megegyezzen a tagok abszolutértékével?

$\boxed{2.}$ Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ vektorokra fennáll, hogy

$$|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| \Leftrightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \perp \underline{v}_1 - \underline{v}_2.$$

3. Bizonyitsuk be, hogy $|\underline{b}|\,\underline{a} + |\underline{a}|\,b$ párhuzamos $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szögfelezőjével!

$$(\underline{a} \neq \underline{0},\quad \underline{b} \neq \underline{0}).$$

4. Igazoljuk, hogy

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|,$$

és

$$|\underline{a} - \underline{b}| \geq \big||\underline{a}| - |\underline{b}|\big|.$$

5. Bizonyitsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy $\triangle$ csucsaiba vezető vektorok összege egyenlő az oldalfelező pontokba vezető vektorok összegével!

6. Igazoljuk vektorok segitségével, hogy ha egy négyszög 2 - 2 szemben fekvő oldala párhuzamos, akkor átlói felezik egymást!

7. **Igazoljuk vektorok segitségével, a sulyvonal definiciója alapján, hogy egy háromszög sulyvonalai egy pontban, harmadolva metszik egymást!**

$\boxed{8.}$ Igaz-e, hogy

a) ha $\underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$, akkor $\underline{a} = \underline{b}$?

b) ha $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{c}$, akkor $\underline{a} = \underline{b}$?

9. Határozzuk meg a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy

$$c\,\underline{a} + d\,\underline{b} \perp d\,\underline{a} - c\,\underline{b}$$

minden valós c, d esetén fennálljon.

10. A $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok nem egysikuak. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{a} \perp \underline{b}$, $\underline{a} \perp \underline{c}$, $\underline{a} \perp \underline{d}$, akkor $\underline{a} = \underline{0}$.

11. Milyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokra áll fent, hogy

a) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{0}$,

b) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$?

12. a) Igazoljuk, hogy ha

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0},$$

akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}\,!$$

$\boxed{b)}$ Igaz-e a következtetés megforditása?

13. Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor esetén fennáll az

$$(\underline{a} \times \underline{b})^2 + (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \underline{a}^2\,\underline{b}^2$$

egyenlőség!

14. A P, R, S pontok helyvektorai $\underline{p}$, $\underline{r}$, $\underline{s}$. Igazoljuk, hogy P, R, S akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha

$$\underline{p} \times \underline{r} + \underline{r} \times \underline{s} + \underline{s} \times \underline{p} = \underline{0}.$$

15. Az $\underline{a}$ vektor hossza kétszerese a $\underline{b}$ vektor hosszának és $\underline{a} - \underline{b} \perp \underline{b}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$. Mekkora a két vektor hajlásszöge?

16. Legyen

$$\underline{d} = (\underline{a} \cdot \underline{b})\, \underline{c} - (\underline{a} \cdot \underline{c})\, \underline{b}.$$

Határozzuk meg az $\underline{a}$ és $\underline{d}$ vektorok hajlásszögét! ($\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{d} \neq \underline{0}$)

17. Határozzuk meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ hajlásszögét, ha

$$(\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \underline{a}^2 \cdot \underline{b}^2.$$

18. Adjuk meg azokat a vektorokat, amelyekre

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$$

és

$$(\underline{a} \cdot \underline{c})\, \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{c})\, \underline{a}.$$

19. Igazoljuk az

$$|\underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot |\underline{c}|$$

egyenlőtlenséget! Mikor áll fenn az egyenlőség?

20. Igazoljuk, hogy tetszőleges valós a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 számokra

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}.$$

21. Bizonyitsuk be vektoralgebrai eszközökkel

a) a szinusz-tételt,
b) a koszinusz-tételt!

22. Legyen

$$\underline{a} = 3\underline{i} + \underline{j} - \underline{k},$$
$$\underline{b} = 5\underline{i} - \underline{j} + z\,\underline{k}.$$

Határozzuk meg z-t ugy, hogy a fenti vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

23. Legyen

$$\underline{a} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k},$$
$$\underline{b} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}.$$

a) Határozzuk meg $\underline{b}$ merőleges vetületét $\underline{a}$-ra!
b) Bontsuk fel $\underline{b}$-t $\underline{a}$-ra merőleges és $\underline{a}$-val párhuzamos vektorok összegére! Egyértelmű a felbontás?

24. Legyen

$$\underline{a} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$$

és

$$\underline{c} = -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}.$$

Határozzuk meg a $\underline{b}$ vektort ugy, hogy

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$$

és

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 11$ legyen.

25. Legyen

$$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k},$$
$$\underline{b} = -2\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k},$$
$$\underline{c} = 3\underline{i} + \underline{k}.$$

Igazoljuk, hogy a $\underline{v} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$ vektor előállitható $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineáris kombinációjaként és adjuk meg $\underline{v}$ előállitását!

26. Számitsuk ki a háromszög területét, ha csucspontjainak koordinátái:

A(1, 2, 3),
B(2, -1, 3),
C(5, -2, -3).

27. Határozzuk meg x értékét ugy, hogy az

A(3, -1, -1), B(5, -2, 3),
C(4, 0, -2), D(x, 0, 1)

csucspontu tetraéder térfogata egységnyi legyen!

28. Döntsük el, hogy egy sikban van-e a következő négy pont!

$P_1(2, 0, 0)$, $P_2(3, -5, -5)$,

$P_3(4, 4, 3)$, $P_4(7, 3, 1)$.

29. a) Irjuk fel a
P(-1, 2, 1) ponton átmenő,
$\underline{n} = [2, 0, -1]$ normálvektoru sik egyenletét!

b) Határozzuk meg a Q(1, 2, -4) pont távolságát a fenti siktól!

30. a) Irjuk fel a P(1, 2, 0) ponton átmenő, $\underline{v} = [5, -3, -1]$ irányvektoru egyenes egyenletét!

b) Határozzuk meg az R(2, 4, -3) pont távolságát a fenti egyenestől!

31. Határozzuk meg a $P(-1, 2, 1)$ pont távolságát az

$$x - 3 = \frac{y - 8}{3} = \frac{z - 3}{4}$$

és

$$4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$$

egyenletü egyenesek sikjától.

32. Igazoljuk, hogy az

$$e_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \qquad e_2 : \begin{cases} x = 5 + 2u \\ y = -1 + 2u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

egyenletrendszerü egyenesek merőlegesek egymásra és irjuk fel az e_1-re illeszkedő, e_2-re merőleges sik egyenletét.

33. Határozzuk meg a c paramétert ugy, hogy az

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{c} = z$$

egyenletrendszerü egyenes párhuzamos legyen az $x - y + 4z = 2$ egyenletü sikkal.

34. Egy háromszög csucspontjainak koordinátái:

$A(5, 1, -2)$, $B(1, 0, 3)$, $C(3, 5, -1)$.

Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges a háromszög sikjára és átmegy a háromszög sulypontján!

35. Határozzuk meg, hogy az

$$x = 2t + 1$$
$$y = t - 2$$
$$z = 2t + 3$$

egyenletrendszerű egyenes hol metszi az

$x - 2y + z = 5$ egyenletű síkot!

36. Határozzuk meg az

$$x + y + z = 0,$$
$$2x - y + z = 3,$$
$$x + y - z = 0$$

egyenletű síkok közös pontjainak mértani helyét.

$\boxed{37.}$ Határozzuk meg a

$$2x + y - z + 5 = 0$$

és

$$x - y + 6z - 3 = 0$$

egyenletű síkok metszésvonalának egyenletét.

38. Határozzuk meg a

$$2x + 5y - 3z + 8 = 0$$

és

$$x - 2y + z - 5 = 0$$

egyenletű síkok közös pontjai mértani helyének az egyenletét.

39. a) Határozzuk meg az

$$x = 3 + t \qquad x = 4 - u$$
$$y = 3t + 8 \qquad y = 9 - 2u$$
$$z = 4t + 3 \qquad z = 9 - 5u$$

egyenletrendszerü egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

b) Változtassuk meg a második egyenletrendszert ugy, hogy egyenese ne messe az első egyenest!

40. $x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{t}$,

$x + 1 = y - 1 = z.$

a) Határozzuk meg t értékét ugy, hogy a fenti két egyenes messe egymást!
b) Irjuk fel a metsző egyenesek sikjának az egyenletét!

41. Határozzuk meg az alábbi két egyenes hajlásszögét:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3}$$

és

$$x = t, \quad y = 2t - 3, \quad z = -5.$$

42. Határozzuk meg az

$$x = 2t - 5$$
$$y = -t + 1$$
$$z = 3t - 6$$

egyenletrendszerü egyenes és a

$2x + y - 3z + 5 = 0$ egyenletü sik hajlásszögét!

43. Adott két egyenes. Egyenleteik:

$$x = 2t - 1 \qquad x = u + 3$$
$$y = t + 3 \quad \text{és} \quad y = -3u + 5$$
$$z = -4t \qquad z = u - 8.$$

Határozzuk meg a

$$3x + 7y + c\,z = 1$$

sik egyenletben a c paramétert ugy, hogy az egyenesek által meghatározott sik merőleges legyen erre a sikra.

44. Határozzuk meg az

$$x = 1 + 3t$$
$$y = 2 + 2t$$
$$z = 1 + 3t$$

egyenletrendszerü egyenes merőleges vetületét az $x - y + z = 1$ egyenletü sikra.

45. a) Irjuk fel annak a siknak az egyenletét melyet az origóból huzott és rá merőleges egyenes a $P(3, -2, 5)$ pontban metsz.

b) Határozzuk meg az origó fenti sikra vonatkozó tükörképének helyvektorát.

46. Irjuk fel a

$$2x - y + 2z = 0$$

és az

$$x - 2y + 2z = 3$$

egyenletü sikok szögfelező sikjának az egyenletét és határozzuk meg a

$$3x - y + c\,z = 5$$

egyenletben c-t ugy, hogy ez a sik merőleges legyen a szögfelező sikra.

47. Irjuk fel az

$$x = 2 - t \qquad\qquad x = 1 + u$$
$$y = 3 + 2t \qquad\qquad y = -u$$
$$z = t + 1 \quad \text{és} \quad z = 2u - 13$$

egyenesek metszéspontján átmenő és szögfelezőjükre merőleges sik egyenletét.

$\boxed{48.}$! A $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ egyenletü sikban adottak az

$A(0, 0, 3)$, $B(0, 4, 0)$, $C(-6, 0, 0)$, $D(-2, 0, 2)$

koordinátáju pontok.
Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a D pontra illeszkedik és felezi az ABC háromszög területét!

II. KOMPLEX SZÁMOK

1. Adjuk meg az alábbi müveletek eredményét kanonikus alakban!

   a) $(\sqrt{2} - j) - j\,(1 - j\sqrt{2})$

   b) $(3 + j)\ \dfrac{2 + j}{10}\ (3 - j)$

   c) $\dfrac{1 + 2j}{3 - 4j} + \dfrac{2 - j}{5j}$

   d) $\dfrac{5}{(1 - j)\,(2 - j)\,(3 - j)}$

   e) $(1 - j)^4 + \dfrac{\overline{(2 + j)}^2}{3 - 4j}$

   f) $\sqrt[3]{-1} + \dfrac{1 + j}{1 - j}$.

2. Adjuk meg az alábbi müveletek eredményét trigonometrikus vagy exponenciális alakban!

   a) $(-1 + j)^7$

   b) $(1 + j\sqrt{3})^{-10}$

   c) $(1 + j)^n + (1 - j)^n$

   d) $\sqrt{2j}$

   e) $\sqrt[3]{-j}$

   f) $\sqrt[4]{-1}$

   g) $\sqrt[6]{8}$

   h) $(-1 + j\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$

   i) $\sqrt[4]{1 + j\sqrt{3}}$

   j) $(-1)^{-\frac{3}{4}}$

3. Adjuk meg az összes olyan z komplex számot, amelynek arkusza és abszolutértéke kielégiti az alábbi összefüggéseket:

a) $\left|\dfrac{z_0}{z}\right| = 3\,|z_0|$ és $\arc \dfrac{z_0}{z} = \dfrac{\pi}{4} + \arc z_0$

(z_0 tetszőleges komplex szám, $z_0 \neq 0$)

$\boxed{\text{b)}}$ $\arc 2z^2 - \arc 3z = \dfrac{\pi}{4}$ és $|z|^3 - 4|z| = 0.$

4. $z_0 = 1 - j$ egy komplex szám egyik negyedik gyöke. Adjuk meg a többi negyedik gyököt.

$\boxed{5.}$ Adjuk meg az összes olyan komplex számot, amelynek egyik hetedik gyöke megegyezik az egyik harmadik gyökével!

$\boxed{6.}$ Egy szabályos háromszög középpontja az origó, egyik csucsa a $z_1 = 1 + j$ komplex szám. Adjuk meg a z_2, z_3 csucspontokat!

7. Egy szabályos hatszög középpontja: $z_0 = 1 + 2j$, egyik csucsa: $z_1 = 1 + j$.
Határozzuk meg a többi csucsot!

8. Egy szabályos háromszög két csucsa: $z_1 = -1$, $z_2 = 1$. Ismert még, hogy $\operatorname{Im} z_3 > 0$. A háromszöget sulypontja körül pozitiv irányban 30°-kal elforgatjuk. Adjuk meg az elforgatott háromszög csucsait!

9. Legyen $|z| = 1$ és $z \neq 1$.
Adjuk meg $\dfrac{1}{1 - z}$ valós és képzetes részét!

10. Igazoljuk a következő azonosságokat!

a) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

b) $\text{Im}z = \dfrac{z - \bar{z}}{2j}$

c) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

11. Melyek azok a z_1, z_2 komplex számok, amelyekre

$\overline{z_1 + z_2}$ és

$\overline{z_1 \cdot z_2}$ is valós?

12. Igazoljuk, hogy ha

$z = x + j\,y$, akkor

$\sqrt{2} \cdot |z| \geq |x| + |y|$.

13. Adjuk meg azokat a komplex számokat amelyeknek trigonometrikus alakja:

$1 - \cos\alpha + j\sin\alpha.$

14. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $|z| - z = 1 + 2j$

b) $|z| + z = 2 + j$

15. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + j\,x_2 - 2\,x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 2j\,x_3 &= 20 \\ j\,x_1 + 3j\,x_2 - (1+j)\,x_3 &= 30 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (1+j)\,x_1 - x_2 + (1-j)\,x_3 &= j \\ x_1 + j\,x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

16. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $z^6 + 16\,z^2 = 0$

b) $(z - 2 - 4j)^2 + (z - 2 - 2j)^2 = 0$

c) $z^2 - 3z + 3 - j = 0$

d) $z^5 - (1 + j)\,z = 0$

e) $z^5 + 3j\,z^2 = \dfrac{(-1 + j)^4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6} \cdot z^2$

17. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\left(\dfrac{1 + j}{1 - j}\right)^2 + \dfrac{1}{x + y\,j} = 1 + j$

b) $z^2 = \bar{z}^2$

$\boxed{\text{c)}}$ $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|\,|z_2|$

18. Bizonyitsuk be, hogy ha $|z| < \frac{1}{2}$,

akkor $\left|(1 + j)\,z^3 + j\,z\right| < \frac{3}{4}$.

19. Értelmezzük az f függvényt a következő módon:

$$f(n) = \left(\frac{1 + j}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1 - j}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$n \in N$.

Határozzuk meg, hogy milyen összefüggés van

$f(n + 4)$ és $f(n)$ között!

20.! Tekintsük az

$$\left(\frac{1 + xj}{1 - xj}\right)^n = c \qquad \begin{array}{l} n \in N \\ x \in R \\ c \in C \end{array}$$

egyenletet adott c és n esetén.

a) Igazoljuk, hogy a megoldhatóság szükséges feltétele $|c| = 1$ teljesülése.
b) Vizsgáljuk meg, hogy minden $c \in C$, $|c| = 1$ esetén van-e megoldás, hány megoldás van és adjuk meg a megoldásokat.

21. Bizonyitsuk be, hogy ha egy z komplex szám és egy α valós szám kielégiti a

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$$

egyenletet, akkor

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$$

is teljesül.

22. Irjuk fel $\cos x$ és $\sin x$ segitségével a következő kifejezéseket:

a) $\cos 4x$
b) $\cos 7x$
c) $\sin 3x$
d) $\sin 6x$

23.! Irjuk fel zárt alakban a következő összegeket:

a) $\frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx$
b) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$

24. Legyenek egy valós együtthatós ötödfoku polinom gyökei:

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -2j, \quad z_3 = 1 + 3j.$$

Határozzuk meg a polinom többi gyökét és irjuk fel a polinomot!

25. Állapitsuk meg, hogy milyen mértani helyeket határoznak meg a következő összefüggések:

a) $|z - j| = 2$

b) $\mathrm{Re}\,z = 1$

c) $\mathrm{Im}\,z > 1$

d) $\frac{\pi}{4} < \arc z \leq \frac{\pi}{2}; \quad 1 < |z| \leq 2$

$\boxed{\text{e)}}$ $0 \leq \arc \frac{z - j}{z + j} < \frac{\pi}{4}.$

III. MÁTRIX MŰVELETEK

1. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a $\underline{\underline{C}}_a$, $\underline{\underline{C}}_b$, $\underline{\underline{C}}_c$, $\underline{\underline{C}}_d$ mátrixot!

a) $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}_a$

b) $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}_b$

c) $3\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}_c$

d) $4\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}_d$

2. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

Határozzuk meg a $2\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}$ mátrixot!

3. Végezzük el a következő müveleteket!

a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg a következő szorzatmátrixok méretét!

a) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$

b) $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}}$

c) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}}$

d) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}$

e) $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}}$

f) $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$

g) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}}$

4/a $\underline{\underline{A}}$ n-edrendü kvadratikus mátrix.

$$\underline{e}_j = \begin{pmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad e_k = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad k = j \\ 0 & \text{ha} \quad k \neq j \end{cases}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{n elemü oszlopmátrix.}$$

Határozzuk meg a következő szorzatokat:

a) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{e}_j$

b) $\underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{A}}$

c) $\underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{e}_j$

d) $\underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$

e) $\underline{b}' \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{e}_j$

f) $\underline{b}' \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$

Általánositsuk a feladatot arra az esetre, ha $\underline{\underline{A}}$ nem kvadratikus.

5. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ és a $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ mátrixokat, ha

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

6. Mely mátrixokra igaz a következő egyenlőség?

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 = \underline{\underline{A}}^2 + 2\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^2.$$

7. a) Adjunk meg másodrendü kvadratikus felcserélhető mátrixokat!

b) Adjunk meg olyan n x n-es mátrixokat, amelyek bármely n-ed-rendü kvadratikus mátrixszal felcserélhetők.

8. Igazoljuk, hogy

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}} \not\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}.$$

9. a) Határozzuk meg az összes 2 × 2-es mátrixot, amellyel a

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mátrixot}$$

jobbról szorozva nullmátrixot kapunk!

b) Van-e fenti tulajdonságu mátrix a

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrixhoz?}$$

10. Igazoljuk, hogy

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}^n$$

(n természetes szám.)

11. Igazoljuk a transzponálás következő azonosságait:

a) $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}'$

b) $(c\underline{\underline{A}})' = c\underline{\underline{A}}'$

c) $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}' \cdot \underline{\underline{A}}'$

12. Bizonyitsuk be, hogy minden kvadratikus mátrix egyértelmüen felirható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

13. Legyen $\underline{\underline{A}}$ egy 2 x 2-es szimmetrikus mátrix, amelynek minden sorában és oszlopában az elemek összege 1.

Bizonyitsuk be, hogy $\underline{\underline{A}}^n$ is ilyen tulajdonságu! ($n \in N$)

$\boxed{14.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix és $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}$, akkor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$.

15. Legyenek $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n x n-es szimmetrikus mátrixok.
Mutassuk meg, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$.

$\boxed{16.}$ Bizonyitsuk be, hogy nincs olyan $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrix, amelyekre

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

fennáll. ($\underline{\underline{E}}$ egységmátrix)

17. Készitsünk olyan mátrixot, amellyel egy tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ mátrixot megszorozva:

a) Két oszlopa felcserélődik.
b) Két sora felcserélődik.
c) Egy oszlop 3-mal szorzódik.
d) Egy sor -2-vel szorzódik.
e) Egy oszlop "c"-szerese egy másik oszlophoz adódik.
f) Egy sor "c"-szerese egy másik sorhoz adódik.

18.! Bizonyitsuk be, hogy minden kvadratikus mátrix előállitható

$$\underline{\underline{X}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{Y}} \text{ alakban,}$$

ahol

$$\underline{\underline{D}} = \langle 1, 1, \dots 1, 0, \dots 0 \rangle$$

alaku diagonálmátrix.

19. Végezzük el a kijelölt müveleteket az alábbi hipermátrixok között:

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 5 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

IV. VEKTORTEREK

$\boxed{1.}$ Adjunk meg egy halmazt. Értelmezzünk elemei között összeadást és valósszámmal szorzást ugy, hogy a keletkező algebrai struktura ne legyen vektortér.

2. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbiakban adott halmazok a közölt müveletekre nézve vektorteret alkotnak-e az adott számtest felett!

a) Az $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ alaku

mátrixok $(a, b, c \in R)$

Müveletek: mátrix összeadás és mátrix szorzása valós számmal. Számtest: R.

b) Az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alaku mátrixok

$(a, b \in R)$

Müveletek: A mátrix szorzás és a mátrix első sorának szorzása valós számmal. Számtest: R

c) A szimmetrikus n-edrendü kvadratikus mátrixok.

Müveletek: mátrix összeadás és valós számmal szorzás. Számtest: R

3. Vektorteret alkotnak-e a valós számtest felett

a) a valós számsorozatok;
b) a valós korlátos számsorozatok;
c) a valós konvergens számsorozatok;
d) a valós divergens számsorozatok,

ha a müveletek:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

és

$$c(a_n) = (ca_n), \quad c \in R.$$

4. Tekintsük a $[-a, a]$ intervallumon folytonos függvények halmazát.

a) Igazoljuk, hogy vektorteret alkotnak R felett a függvény-összeadás és számmal szorzás müveletekre!

b) Adjunk meg alteret a fenti vektortérben!

c) A páratlan függvények alteret alkotnak-e?

5. Az R-en folytonos függvények 4. alatti müveletekre alkotott vektorterének alterét képezik-e az alább felsorolt halmazok?

a) Az $a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$(a_i \in R \quad i = o, \ldots n)$ alaku polinomok.

b) A pontosan n-edfoku polinomok.

c) Az

$$f(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i e^{ix}$$

alaku f függvények $(a_i \in R, \ i = o, \ldots n)$.

d) Azok a differenciálható f függvények, amelyekre

$$f'(x) + c\, f(x) = g(x)$$

(c adott valós szám és g adott egyváltozós függvény).

e) Azok a g függvények, amelyekre

$$g(x) = \begin{cases} \text{racionális} & \text{ha } x \in Q \\ \text{irracionális} & \text{ha } x \in R - Q. \end{cases}$$

6. a) Mutassuk meg, hogy a komplex számok az összeadásra és számmal szorzásra vektorteret alkotnak a valós számtest és a komplex számtest felett is!

$\boxed{\text{b)}}$ Vizsgáljuk meg, hogy az

$$|e^x (\cos y + j \sin y)| = 1$$

feltételt kielégitő $x + jy$ komplex számok alterét alkotják-e a komplex számok terének.

7. Bizonyitsuk be, hogy az

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (a, b \in R)$$

alaku mátrixok mátrix összeadásra és valós számmal szorzásra alkotott vektortere izomorf a komplex számok valós számtest feletti vektorterével!

8. Legyen V_1 és V_2 altere a V vektortérnek.

a) Altér-e $V_1 \cap V_2$?

$\boxed{\text{b)}}$ Altér-e $V_1 \cup V_2$?

9. Legyen V_1 a V vektortér altere, $V_1 \neq V$. Mutassuk meg, hogy van olyan V_2 altér V-ben, hogy

$$V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}.$$

10. Vizsgáljuk meg, hogy igazak-e a következő állitások!

a) Nincs egy elemü vektortér.
b) Van 10 elemü vektortér.
c) Van olyan vektortér, amelynek két altere van.
d) Minden vektortérnek véges számu altere van.

11. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mely $t \in R$ értékekre lineárisan függetlenek a fenti vektorok?

12. $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egy vektortér két lineárisan független vektora. Határozzuk meg, az összes olyan c, d valós számot, amelyekkel a

$$c\,\underline{a} + 2\underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{a} - d\,\underline{b}$$

vektorpár lineárisan összefüggő!

13. Állapitsuk meg, hogy a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vektorok}$$

által generált vektortérben benne van-e az

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ vektor?

14. Állapitsuk meg, hogy a következő vektorrendszerek lineárisan függetlenek, vagy összefüggők?

a) e^x, e^{2x}

b) 1, e^x; e^{2x}, ..., e^{nx}.

c) 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

15. Állapitsuk meg, hogy lehet-e bázisa a valós másodrendü kvadratikus mátrixok vektorterének a következő négy mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. a) Adjuk meg az

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & a \end{pmatrix}$$

alaku mátrixok vektorterének egy bázisát!

b) Bázisát alkotja-e a fenti vektortérnek a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

vektorrendszer?

17. Legyen S az n-edrendü szimmetrikus mátrixok mátrix összeadásra és valós számmal szorzásra alkotott vektortere. Adjuk meg a vektortér egy bázisát! Mekkora dim S?

18. a) Adjuk meg a legfeljebb harmadfoku valós együtthatós

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

polinomok lineáris terének egy bázisát!

b) Bázis-e a következő vektorrendszer?

$6x^3 - 4x^2 + 2x - 3,$

$7x^2 - 5x + 4,$

$-3x + 2,$

$-4.$

19. Állapitsuk meg, hogy mekkora a dimenziója a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i e^{ix}$$

alaku függvények vektorterének! (Lásd az 5/c. feladatot!)

20. Tekintsük a négyelemü oszlopvektortér

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorai által kifeszitett A alteret és a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bázisu B alteret. Határozzuk meg az $A \cap B$ altér dimenzióját!

21. Legyen V_1 az

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorok,

V_2 az $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

vektorok által generált lineáris tér.
Határozzuk meg, V_1, V_2 és $V_1 \cap V_2$ dimenzióját!

22. A V_1 vektortér egy generátorrendszere az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ vektorpár.

A V_2 vektorteret a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

vektorok generálják.
Határozzuk meg a $V_1 \cap V_2$ vektortér egy bázisát és dimenzióját!

23. Állapitsuk meg, hogy hány dimenziós alteret alkotnak az

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

tulajdonságu $(x_1, \dots, x_n)$ sorvektorok az n elemü sorvektorok lineáris terében.

24. a) Válasszuk meg "c"-t ugy, hogy az

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix}$$

vektorrendszer a négyelemü oszlopvektortérnek bázisa legyen!

b) Adjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor koordinátáit a fenti bázisban!

25. A térvektorok lineáris terének egy bázisa $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$.
Legyen

$$\underline{e}_1 = \underline{i} + 3\underline{j},$$
$$\underline{e}_2 = -\underline{j} + \underline{k},$$
$$\underline{e}_3 = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}.$$

Mutassuk meg, hogy $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ lehet bázis, és adjuk meg a

$$v = \underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$$

vektort az uj bázisban!

26. Legyen V az e^x és e^{-x} : B_1 függvények által generált lineáris tér.
Bizonyitsuk be, hogy V-nek bázisa az sh x, ch x : B_2 függvényrendszer is és adjuk meg a B_1-ről a B_2-re és a B_2-ről a B_1-re való áttérés mátrixait!

27. Legyen V az $f(x) = a + b \cos x + \cos^2 x$ alaku függvények lineáris tere. ($a, b, c \in R$)

a) Igazoljuk, hogy $1, \cos x, \cos^2 x$ V-nek egy bázisa!

b) Bizonyitsuk be, hogy $1, \cos x, \cos 2x$ is bázisa V-nek és adjuk meg az első bázisról a másodikra való áttérés transzformációjának a mátrixát!

28. Bizonyitsuk be, hogy ha egy vektorrendszer a V vektortér minden vektorát egyetlen lineáris kombinációval állitja elő, akkor ez a vektorrendszer lineárisan független, tehát bázis.

29. a) Igazoljuk, hogy ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ egy lineáris tér összefüggő vektorrendszere, akkor van olyan vektor közöttük, amely kifejezhető a többiek lineáris kombinációjával!

b) Döntsük el, hogy a fenti következtetés megfordítható-e?

30. Legyen $\dim V = n$.
Bizonyitsuk be, hogy minden $k < n$ természetes szám esetén van V-nek k dimenziós altere!

$\boxed{31.}$ Legyen V n dimenziós vektortér a komplex számtest felett.

a) Hány dimenziós vektorteret kapunk, ha fentit a valós számtest felett tekintjük?

b) Legyen V egy bázisa:

$\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$.

Adjuk meg ennek segitségével a valós számtest feletti vektortérnek egy bázisát!

32. Bizonyitsuk be, hogy ha V_1 és V_2 a V vektortér alterei, akkor

$$\dim (V_1 \cap V_2) \leqq \min (\dim V_1, \dim V_2)$$

33. ! Bizonyitsuk be, hogy ha $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$, V_1 és V_2 a V vektortér alterei, akkor

$$\dim (V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

34. Legyen

$$\underline{\underline{C}}(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1+t & 2 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

t tetszőleges komplex szám.
Határozzuk meg $\underline{\underline{C}}(t)$ rangját!

35. Adjunk meg olyan 3×2-es mátrixot, amelynek rangja:

a) nulla
b) egy
c) kettő

36. Az $\underline{\underline{A}}_n = (a_{ij})$ $\quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$

mátrix elemeiről a következőket tudjuk:

$$a_{ii} \neq 0,$$

$$a_{i1} \neq 0,$$

$$a_{in} \neq 0 \qquad i = 1, \dots, n,$$

a mátrix többi eleme nulla.
Határozzuk meg a mátrix rangját!

37. Egy

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \qquad i = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, m$$

mátrix két sora és két oszlopa csak nullától különböző elemeket tartalmaz, a mátrix többi eleme nulla. Adjunk alsó és felső becslést a mátrix rangjára!

38. ! Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges összeadható $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \leqq \text{rang}\ \underline{\underline{A}} + \text{rang}\ \underline{\underline{B}}$$

39. ! Legyenek $\underline{\underline{A}}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}_n$ összeadható mátrixok. Bizonyitsuk be, hogy a

$$\sum_{=}^{n} \underline{\underline{A}}_i$$

mátrix oszlopai által kifeszitett vektortér dimenziója nem nagyobb a tagok oszlopai által kifeszitett vektorterek dimenzióinak összegénél!

40. ! Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges összeszorozható $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}) \leqq \min\ (\text{rang}\ \underline{\underline{A}},\ \text{rang}\ \underline{\underline{B}})$$

41. $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrixok.

a) Bizonyitsuk be, hogy

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \leqq n$$

b) Adjunk feltételt, amely biztositja, hogy

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}) = n \quad \text{legyen.}$$

42. Igazoljuk, hogy tetszőleges kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrixra

$$\text{rang}\ \underline{\underline{A}}^k \leqq \text{rang}\ \underline{\underline{A}}$$

(k természetes szám) és adjunk meg olyan mátrixot, amelyre

$$\text{rang}\ \underline{\underline{A}}^2 < \text{rang}\ \underline{\underline{A}}.$$

43. Legyen $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus n-edrendü mátrix,

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}.$$

Lehet-e a mátrix rangja n?

44. ! Bizonyitsuk be, hogy minden $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix előállitható

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{Y}}$$

alakban, ahol

$$\underline{\underline{D}} = \left\langle 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots 0 \right\rangle$$

és főátlójában rang $\underline{\underline{A}}$ számu egyes van, $\underline{\underline{X}}$ és $\underline{\underline{Y}}$ rangja pedig megegyezik rendjével.

45. ! Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrix, rang $\underline{\underline{A}} = r_1$, rang $\underline{\underline{B}} = r_2$.

Igazoljuk, hogy

$$\text{rang } (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \geqq r_1 + r_2 - n.$$

V. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

1. Tekintsük az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Döntsük el, hogy igazak, vagy hamisak a következő állitások!

   a) Ha végtelen sok megoldása van, akkor $n > m$.
   b) Ha egy megoldás van, akkor $n = m$.
   c) Ha $n = m$, akkor egy megoldás van.
   d) Ha $n > m$, akkor nem egyértelmü a megoldás.

2. Oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + 2z - u &= 0 \\ -x + z + 3u &= 0 \\ x + 2y - 5z + 5u &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 12x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= 19 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 \phantom{{}+x_4} &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 1 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n &= 3 \\ &\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} &= n \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_n &= 2 \\ &\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_n &= n \end{aligned}$$

$\boxed{5.}$ Határozzuk meg az összes c, d valós számot ugy, hogy az alábbi egyenletrendszernek:

α) egy megoldása legyen;
β) végtelen sok megoldása legyen;
γ) ne legyen megoldása;

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 3 \\ y + cz &= 2 \\ y + z &= d \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg c értékét ugy, hogy az alábbi egyenletrendszernek legyen megoldása és adjuk meg a megoldást!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 &= -12 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= c \end{aligned}$$

7. Határozzuk meg c értékét ugy, hogy az alábbi egyenletrendszernek legyen megoldása, és adjuk meg a megoldást!

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= c \end{aligned}$$

8. Diszkutáljuk az alábbi egyenletrendszereket!

a) $$\begin{aligned} 2x + cy + dz &= 1 \\ cx + dy + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} cx + y + z &= 1 \\ x + cy + z &= c \\ x + y + cz &= c^2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + jy &= cx \\ -3jx + 2y &= cy \end{aligned} \qquad (j = \sqrt{-1})$$

9. Diszkutáljuk és oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} cx_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + (1+c)x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (1+c)x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

10.! A $\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer mátirxára

$$\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}.$$

Bizonyitsuk be, hogy az $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációi megoldásai az egyenletrendszernek.

11. Legyen $\underline{\underline{A}}$ n-edrendü mátrix.
Igazoljuk, hogy ha az

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

egyenletnek tetszőleges n elemü $\underline{b}$ oszlopmátrix esetén van megoldása, akkor a megoldás egyértelmü.

12. Igazoljuk, hogy nincs olyan inhomogén lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldásvektorai vektorteret alkotnak!

13. Döntsük el, hogy invertálhatók-e az alábbi mátrixok! Ha van inverz, akkor adjuk meg!

a)
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Válasszuk meg a c paramétert ugy, hogy a mátrix intertálható legyen, majd számitsuk ki az inverz mátrixot!

a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

15.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix}$$

Mely x értékek esetén van $\underline{\underline{A}}$-nak inverze?

16. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ $\quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad i = j \\ 1 & \text{ha} \quad i \neq j \end{cases}$$

Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrixot!

17. a) Határozzuk meg "c" értékét ugy, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1}$ létezzen!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} c & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ c & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) "c" megválasztása után oldjuk meg az

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenletet!

18.! Bizonyitsuk be, hogy a

$$c\,\underline{\underline{A}}^2 + d\,\underline{\underline{A}} + e\,\underline{\underline{E}} = 0$$

egyenletet kielégitő $\underline{\underline{A}}$ mátrix invertálható! (c, d, e tetszőleges komplex számok, $e \neq 0$.)

19. a) $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrixok,

Rang $\underline{\underline{A}} = n$.

Igazoljuk, hogy

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}.$$

$\boxed{\text{b)}}$ Igaz-e a fenti állitás, ha Rang $\underline{\underline{A}} < n$?

20. a) Legyen

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

és

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

Bizonyitsuk be, hogy ekkor

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}.$$

$\boxed{\text{b)}}$ Ha csak annyit tudunk, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$, következtethetünk-e arra, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$?

21. a) Melyek azok a diagonálmátrixok, amelyek invertálhatók?

b)

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Adjuk meg $\underline{\underline{D}}^{-1}$-et!

22. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ n-edrendü mátrix és $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}'$ egy olyan diagonálmátrix, amelynek a fő átlójában nincs nulla, akkor $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai az n-dimenziós oszlopvektortérnek bázisát alkotják.

23. $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ invertálható mátrixok. Igazoljuk a következő egyenlőségeket!

a) $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$

b) $(\underline{\underline{A}}^{n})^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{n}$

c) $(\underline{\underline{A}}')^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})'$,

24. Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges n-edrendü $\underline{\underline{A}}$ mátrix és invertálható $\underline{\underline{B}}$ mátrix esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1})^{n} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}^{n} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1}$$

$(n \in N)$

25. Legyen $\underline{\underline{A}}$ invertálható szimmetrikus mátrix. Mutassuk meg, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1}$ is szimmetrikus!

26. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ felcserélhető mátrixok és $\underline{\underline{A}}^{-1}$ létezik, akkor $\underline{\underline{A}}^{-1}$ és $\underline{\underline{B}}$ is felcserélhetők.

27. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}^{k} = \underline{\underline{0}}$, akkor $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ invertálható és

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^{2} + \ldots + \underline{\underline{A}}^{k-1}.$$

VI. A DETERMINÁNS

1. Számitsuk ki a következő determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} j & j & j \\ j & 2+2j & j \\ j & j & 1+3j \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{vmatrix}$

(j: képzetes egység)

2. Számitsuk ki a következő determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$

(a, b tetszőleges valós számok)

3. Számitsuk ki a következő n-edrendü mátrixok determinánsának az értékét:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 2 \\ & & \dots & & \\ 2 & 2 & \dots & & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ & \dots & & \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket (a, b adott valós számok)!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ b & b & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$

5. Egy n-edrendű $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix minden elemére fennáll a következő egyenlőség:

$$a_{ij} = \min(i,j).$$

Számitsuk ki det $\underline{\underline{A}}$ értékét!

6. a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{pmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy det $\underline{\underline{A}} = -8$.

b)

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy $\det \underline{\underline{B}} = 0$.

c) Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{C}}$ fenti alaku és rendje nagyobb mint három, akkor $\det \underline{\underline{C}} = 0$.

7. Legyen $\underline{\underline{A}}$ n-edrendü mátrix, amelynek elemei az 1 és -1 számok.
Igazoljuk, hogy $\det \underline{\underline{A}}$ osztható 4-gyel, ha $n \geq 3$.

8.! Igazoljuk, hogy ha egy n-edrendü mátrix elemeire

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki},$$

akkor $\det \underline{\underline{A}}$ valós!

9.! Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ $(2n+1)$-ed rendü mátrix és elemeire

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

$(1 \leq i \leq 2n+1$

$1 \leq k \leq 2n+1)$, akkor

$$\det \underline{\underline{A}} = 0.$$

10. Legyen $\underline{\underline{A}}$ n-edrendü mátrix és c skalár. Bizonyitsuk be, hogy

$$\det (c \cdot \underline{\underline{A}}) = c^n \cdot \det \underline{\underline{A}}.$$

11. Bizonyitsuk be, hogy ha egy kvadratikus $\underline{\underline{A}}_n$ mátrix főátlója felett (v. alatt) minden elem nulla, akkor

$$\det \underline{\underline{A}}_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

12. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Bizonyitsuk be, hogy $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{B}} \cdot \det \underline{\underline{C}}$,

ha $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$, $\underline{\underline{C}} = (c_{ij})$, $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le 2$.

VII. EUKLIDESZI TEREK

$\boxed{1.}$ Tekintsük a háromelemű valós oszlopmátrixok lineáris terét (műveletek mátrix összeadás és számmal szorzás) Skaláris szorzás-e a következő hozzárendelés?

$$(\underline{\underline{x}} \mid \underline{\underline{y}}) = \underline{\underline{x}}' \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{y}}$$

2. Legyen V a $[0,1]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények vektortere. Tekinthető-e skaláris szorzatnak:

a) $$(f \mid g) = \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, dt + f(0)\, g(0)$$

b) $$(f \mid g) = \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, dt.$$

3. Skaláris szorzást definiál-e az

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

hozzárendelés

a) az $[a,b]$-n folytonos függvények lineáris terében?
b) az $[a,b]$-n integrálható függvények lineáris terében?

4. Az E euklideszi tér $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ vektorai ortonormáltak

a) ortogonális-e
b) normált-e

az $\underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_3 - \underline{e}_4, \underline{e}_3 + \underline{e}_4$ vektorrendszer?

5. A valós négyelemű oszlopvektorok euklideszi terében adjunk meg olyan ortogonális bázist, amelynek egyik vektora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Legyen $B : \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ egy E_n euklideszi tér bázisa és

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{b}_i, \qquad \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \underline{b}_i$$

két tetszőleges vektor E_n-ben.
Bizonyitsuk be, hogy ha

$$(\underline{x} \mid \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

skaláris szorzat, akkor a B bázis ortonormált!

7. Bizonyitsuk be, hogy ha az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ vektorrendszer egy E_n n-dimenziós euklideszi tér bázisa, és

$$\underline{v} \perp \underline{e}_i \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

akkor $\underline{v} = \underline{0}$.

8. Tekintsük a valós együtthatós polinomok euklideszi terét a

$$(p(x) \mid q(x)) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

skaláris szorzattal.
Határozzuk meg az összes olyan $q(x)$ elsőfoku polinomot, amely ortogonális a $p(x) \equiv 1$ polinomra, és $\| q(x) \| = 1$. (Itt normán a skaláris szorzat által generált normát értjük.)

9. Igazoljuk, hogy bármely euklideszi térben a skalárszorzattal értelmezett normára:

a) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\|x\|^2 + \| y \|^2)$

b) Ha $\underline{x} \perp \underline{y}$, akkor

$$\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2$$

vagyis érvényes a Pythagoras tétel.

$\boxed{\text{c)}}$ Igaz-e a b) alatti következtetés megforditása?

10. Mutassuk meg, hogy ha

$$\underline{v} \in E_n \qquad \text{és} \qquad \underline{v} \neq \underline{0},$$

akkor a

$$(\underline{v} \mid \underline{x}) = 0$$

tulajdonságu $\underline{x}$ vektorok E_n-nek $n - 1$ dimenziós alterét alkotják.

11.! Legyen S az E_n euklideszi tér egy altere. Értelmezzük az $S^{\perp}$ halmazt a következő módon:

$$S^{\perp} = \left\{ \underline{s}^{\perp} : \underline{s}^{\perp} \in E_n \ \text{ és } \ (\underline{s}^{\perp} \mid \underline{s}) = 0, \ \text{ ha } \ \underline{s} \in S \right\}$$

a) Bizonyitsuk be, hogy $S^{\perp}$ is altere E_n-nek!

b) $S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\}$

c) $S \oplus S^{\perp} = E_n$.

12. Legyen S az E_n euklideszi tér egy altere. Igazoljuk, hogy

$$(S^{\perp})^{\perp} = S.$$

13. Tekintsük a valós négyelemü, oszlopvektorok euklideszi terét az

$$(\underline{x} \mid \underline{y}) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

skalárszorzattal. Bontsuk fel az

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ vektort egy az } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorok által kifeszített altérbe eső és egy arra merőleges komponens összegére!

14. Legyen E euklideszi tér, $\underline{x}, \underline{y} \in E$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{y} \neq \underline{0}$. Határozzuk meg a c skalárt ugy, hogy

$$\| x - c\, y \|$$

minimális legyen! (A norma euklidesz normát jelent.)

15. Legyen E a $[0, 2\pi]$-n folytonos függvények euklideszi tere, az

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

skalári. szorzással. Tekintsük E következő E' alterét:

$$E' = \left\{ T_n(x) : T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \right.$$

$$\left. a_k, b_k \in R \quad (k = 0, \ldots, n)\text{-re} \right\}$$

Határozzuk meg azt az E'-beli $T_n(x)$ trigonometrikus polinomot, amelyre $\| f(x) - T_n(x) \|$ minimális.

16. Állapitsuk meg, hogy normát határoznak-e meg a következő relációk:

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \| \underline{v} \| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$

b) Az n-edrendü mátrixok vektorterében

$$\| \underline{\underline{A}} \| = \max_{\| \underline{\underline{x}} \| = 1} \| \underline{\underline{A}}\, \underline{x} \|$$

c) A másodrendü mátrixok vektortetében $\| \underline{\underline{A}} \| = | \det \underline{\underline{A}} |$.

17. Állapitsuk meg, hogy normát határoznak-e meg a következő relációk: Az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények vektorterében

a) $\| f \| = \max_{t \in [a,b]} | f(t) |$

b) $\| f \| = \int_a^b | f(t) | \, dt$

c) $\| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, dt}$

d) Az $[a,b]$ intervallumon integrálható függvények terében b)

18. A valós elemü konvergens (a_n) sorozatok lineáris terében megfelel-e normának

a) a sorozat határértéke

b) a sorozat határértékének abszolut értéke

c) $\sup |a_n|$

19. a) Bizonyitsuk be, hogy az n-edrendü kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrixok vektorterében normát határoz meg a következő egyenlőség:

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

b) Legyen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\|\underline{x}\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$. Bizonyitsuk be,

hogy $\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| \leqq \|\underline{\underline{A}}\|\,\|\underline{x}\|$!

20. a) Bizonyitsuk be, hogy

$$\|A_n\| = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}| \quad \text{norma!}$$

b) Igazoljuk, hogy

$$\|\underline{\underline{A}}_n^k\| \leqq n^{k-1} \|\underline{\underline{A}}_n\|^k$$

21. Legyen az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények vektortetében

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Bizonyitsuk be, hogy egy (f_n) függvénysorozat akkor és csak akkor konvergens a fenti normában, ha egyenletesen konvergens.

VIII. LINEÁRIS OPERÁTOROK

1. Legyen V az akárhányszor differenciálható egyváltozós függvények vektortere és

$$Df = f'', \quad \text{ha} \quad f \in V.$$

a) Bizonyitsuk be, hogy D lineáris operátora V-nek!
b) Határozzuk meg a magteret!

2. Legyen V a térvektorok lineáris tere. Állapitsuk meg, hogy lineáris operátorok-e az alábbi hozzárendelések!

a) $T\underline{v} = \underline{c} \cdot \underline{v}$, $\underline{c}$ adott térvektor.
b) V vektoraihoz hozzárendeljük vetületüket az

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = 2t$$

egyenletrendszerü egyenesen.
c) $T\underline{v} = \underline{c} \times \underline{v} + \underline{d}$; $\underline{c}$, $\underline{d}$ adott térvektorok.
d) $T\underline{v}$ legyen $\underline{v}$ vetülete az $[x\ y]$ koordinátasikon.

3. Legyen U az $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t$ (a_0, a_1, b_1, valós számok) alaku f függvények vektortere és

$$Df = f'' + f'.$$

a) Igazoljuk, hogy D az U vektortérnek lineáris operátora!
b) Adjuk meg D mátrixát, ha 1, $\cos t$, $\sin t$ a bázis!.

4. A legfeljebb n-edfoku polinomok lineáris terében a következőképpen értelmezünk egy T transzformációt:

$$T\,p(x) = p(x+1).$$

Mutassuk meg, hogy T homogén lineáris transzformáció, és adjuk meg T egy mátrixát!

5. Legyen T_n a legfeljebb n-edfoku valósegyütthatós polinomok vektortere, $k \in N$, $k < n$.
Tekintsük azt a leképezést, amely T_n minden polinomjához hozzárendeli azt a legfeljebb k-adfoku polinomot amely a k-nál magasabbfoku tagok elhagyásával keletkezik.
a) Igazoljuk, hogy a leképzés homogén és lineáris!
b) Válasszunk bázispárt és adjuk meg az operátor mátrixát!

6. Adjunk meg egy U vektorteret és egy T

$$U \xrightarrow{T} U$$

transzformációt, amely nem lineáris operátor!

7. Adjunk meg egy

$$U \xrightarrow{L} V$$

leképezést amely nem lineáris operátor!

8. Bizonyitsuk be, hogy ha T az U vektortér homogén lineáris transzformációja és

$$T^2 = 0,$$

akkor a képtér része a magtérnek.

$\boxed{9.}$ Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$V : \left\{ \underline{x} : \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Adjuk meg az $\underline{x} \to \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ lineáris operátor képterének és magterének a dimenzióját!
b) Adjuk meg a magtér egy bázisát!

10. Legyen az U vektortér egy bázisa: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$. Tekintsük a következő homogén lineáris transzformációt:

$$A\,\underline{e}_1 = \underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

$$A\,\underline{e}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

$$A\,\underline{e}_3 = 2\underline{e}_1 + c\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

Határozzuk meg c-től függően a képtér és a magtér dimenzióját!

11. Legyen T a térvektorok euklideszi terének egy lineáris transzformációja:

$$T\,\underline{i} = \underline{a}$$

$$T\,\underline{j} = \underline{a} \times \underline{b}$$

$$T\,\underline{k} = \underline{a} + 2\underline{b},$$

ahol $\underline{a} = \underline{i} - \underline{j}$, $\underline{b} = \underline{i} + \underline{k}$.
Irjuk fel T mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban.

12. Irjuk fel a Z tengely körüli 60°-os pozitiv irányu forgatás lineáris operátorának mátrixát $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban, majd határozzuk meg a

$$\underline{v} = \underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k}$$

vektor képét!

13. Irjuk fel annak a lineáris transzformációnak a mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban, amely a tér minden vektorát

a) a $2x + y + z = 0$ egyenletü sikra vetiti;
b) tükrözi az előbbi sikra, majd kétszeresre nyujtja;
c) az $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$ egyenletrendszerü egyenesre vetiti.

14. Legyen V a térvektorok vektortere és

$$\underline{a} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}.$$

Bizonyitsuk be, hogy a

$$T\,\underline{v} = \underline{a} \times \underline{v} \qquad \underline{v} \in V$$

leképezés homogén lineáris transzformáció és irjuk fel mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban!

15. Legyen egy E_3 euklideszi tér ortogonális bázisa $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$. Euklideszi normáik:

$$\|\underline{e}_1\| = 2, \quad \|\underline{e}_2\| = 3, \quad \|\underline{e}_3\| = 1,$$

$$\underline{a} = 2e_1 - e_2 - e_3.$$

Adjuk meg a

$$T\,\underline{v} = (\underline{v} \mid \underline{a})\,\underline{a} \qquad \underline{v} \in E_3$$

módon adott T lineáris operátor mátrixát a fenti bázisban!

16. Legyen U a legfeljebb n-edfoku polinomok vektortere. Az U-n értelmezett T leképezés $\underline{u} = P_n(t) \in U$-hoz a következő módon rendel képet:

$$T\underline{u} = \int_0^t P_n(x)\,dx.$$

a) Igazoljuk, hogy T lineáris operátor!
b) Irjuk fel mátrixát egy tetszés szerint választott bázispárban!

17. Forgassuk el a térvektorokat először a $\underline{k}$ körül α szöggel, majd a $\underline{j}$ körül β szöggel pozitiv irányba.

a) Igazoljuk, hogy a két egymás utáni forgatás transzformációja homogén és lineáris!

b) Adjuk meg a transzformáció $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisbeli mátrixát!

18. Legyen T egy U vektortér lineáris operátora, amelyre

$$T^2 - T + E = 0.$$

Igazoljuk, hogy T invertálható és adjuk meg a T^{-1} operátort T segitségével.

19. Legyen T a V_n vektortérnek egy olyan lineáris operátora, hogy

$$T^n = 0, \quad \text{de} \quad T^{n-1} \neq 0,$$

és $\underline{e} \in V_n$ egy olyan vektor, hogy

$$T^{n-1}\underline{e} \neq \underline{0}.$$

a) Bizonyitsuk be, hogy

$\underline{e}$, $T\underline{e}$, ..., $T^{n-1}\underline{e}$ bázisa lehet V_n-nek!

b) Határozzuk meg T mátrixát ebben a bázisban!

20. A T lineáris operátor egy négy-dimenziós V vektortér $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ bázisvektoraihoz a

$$T\underline{e}_1 = \underline{e}_2 - 2\underline{e}_3$$
$$T\underline{e}_2 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$
$$T\underline{e}_3 = 3\underline{e}_2 - \underline{e}_4$$
$$T\underline{e}_4 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_3$$

vektorokat rendeli.

a) Adjuk meg T mátrixát a

$B : \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisban.

$\boxed{\text{b)}}$ Adjuk meg T mátrixát a

$C : \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_2 + \underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisban.

21. Legyen a térvektorok vektortetének egy bázisa

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \quad \underline{e}_3 \perp \underline{e}_1, \quad \underline{e}_3 \perp \underline{e}_2.$$

Vetitsük a tér vektorait az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ vektorok sikjára, merőlegesen. Határozzuk meg a transzformáció mátrixát az

$$\underline{e}'_1 = \underline{e}_1$$

$$\underline{e}'_2 = \underline{e}_2$$

$$\underline{e}'_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

bázisban!

22. A T lineáris operátor az U vektortér $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektoraihoz a következő módon rendel képet:

$$T\,\underline{e}_1 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3,$$

$$T\,\underline{e}_2 = 3\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3,$$

$$T\,\underline{e}_3 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_3.$$

a) Invertálható-e T?

b) Adjuk meg T mátrixát a $2\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3, 3\underline{e}_2$ bázisban!

23. Legyen S az E_n euklideszi tér egy altere. Tekintsük a következő módon értelmezett P(un. projekció) operátort: ha $\underline{v} \in E_n$ és $\underline{s} \in S$, akkor

$$P\underline{v} \in S \quad \text{és} \quad (\underline{v} - P\underline{v} \mid s) = 0$$

(azaz P hozzárendeli $\underline{v}$-hez annak S-beli merőleges vetületét)
Bizonyitsuk be, hogy
a) P lineáris operátor
b) P $\forall\ \underline{v} \in E_n$-hez annak S-beli minimalizáló vektorát rendeli hozzá
c) $P^2 = P$
d) $\forall\ \underline{v} \in E_n$ egyértelmüen felirható $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ alakban, ahol $\underline{v}_1$ P képterében, $\underline{v}_2$ P magterében van
e) P önadjungált.

Gondoljuk végig a fenti állitásokat, ha E_n a térvektorok euklideszi tere S pedig egy sik vagy egyenes vektorait jelenti.

$\boxed{24.}$! Legyen V n-dimenziós vektortér, U_1 a V altere, dim $U_1 = r_1$. Egy V-n értelmezett T lineáris operátor képtere $U_2 \subset V$, dim $U_2 = r_2$. A T operátor az U_1 alteret képezze le V egy r dimenziós alterébe.
Bizonyitsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 - n \leqq r \leqq \min(r_1, r_2)$$

25. Bizonyitsuk be, hogy ha

$$U_1 \quad \text{és} \quad U_2$$

invariáns alterei az U vektortérnek a T lineáris operátorra vonatkozóan, akkor

$$U_1 \cap U_2 \quad \text{is invariáns altere U-nak.}$$

26.! Legyen T az U vektortér lineáris operátora,

$$U = U_1 \oplus U_2, \text{ ahol}$$

U_1 és U_2 invariáns alterek.

Milyen alaku lesz T mátrixa a $B_1 \cup B_2$ bázisban, ahol B_1 az U_1 és B_2 az U_2 bázisa?

27. A $[-1, 1]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terében értelmezzünk skaláris szorzást:

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

módon. Legyen $T f(t) = f(-t)$.

a) Bizonyitsuk be, hogy T lineáris operátor.

b) Határozzuk meg a T^* operátort.

28. Legyen egy E valós euklideszi tér két vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Értelmezzük az $\underline{a} \circ \underline{b}$ operátort a következő módon:

$$(\underline{a} \circ \underline{b})\, \underline{x} = \underline{a}(\underline{b} \mid \underline{x}), \quad \text{ha} \quad \underline{x} \in E.$$

a) Bizonyitsuk be, hogy $\underline{a} \circ \underline{b}$ lineáris operátor!
b) Határozzuk meg az

$(a \circ b)^*$ operátort!

29. Legyen E_3 a térvektorok euklideszi tere és $T = a \times$ operátor a következő:

$$T\, \underline{v} = \underline{a} \times \underline{v} \quad (\underline{a} \neq \underline{0} \text{ adott vektor, } \underline{v} \in E_3 \text{ tetszőleges})$$

a) Igazoljuk, hogy T lineáris operátor.
b) Adjuk meg ortonormált bázisbeli mátrixát.
c) Igazoljuk, hogy $T^* = -T$.

30. Bizonyitsuk be, hogy a térvektorok euklideszi terének minden T antiszimmetrikus operátorához egyértelműen található olyan $\underline{a}$ vektor, amellyel

$$T = \underline{a} \times \qquad \text{(l. 29. feladat)}$$

Az $\underline{a}$-t nevezzük T vektorinvariánsának.
(T antiszimmetrikus operátor, ha $T^* = -T$)

31. Bizonyitsuk be, hogy a valós E_n euklideszi tér minden lineáris operátora egyértelműen bontható fel egy szimmetrikus és egy anti-szimmetrikus ($T^* = -T$ tulajdonságu) operátor összegére.

32. Az (a, b) intervallumon akárhányszor differenciálható, f(a) = f(b) tulajdonságu függvények euklideszi terében legyen

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt \qquad \text{és} \qquad Tf = f'.$$

Határozzuk meg a T^* operátort!

33. Legyen A a valós E_n euklideszi tér szimmetrikus operátora. Igazoljuk, hogy

$$A^n$$

is szimmetrikus $(n = 2, 3, \ldots)$

$\boxed{34.}$ Egy operátor mátrixa szimmetrikus. Következik-e ebből, hogy az operátor szimmetrikus?

35. Bizonyitsuk be az adjungált operátor következő tulajdonságát:

$$(T \cdot T^*)^* = T \cdot T^*$$

(vagyis $T \cdot T^*$ önadjungált operátor).

36. Bizonyitsuk be, hogy ha

$$T^* T = E,$$

akkor

$$(T^{-1})^{*} T^{-1} = E \quad \text{is fennáll!}$$

37.! Legyen T egy euklideszi tér önadjungált operátora.
a) Igazoljuk, hogy ha X az operátor tárgyterének egy invariáns altere, akkor $X^{\perp}$ is invariáns altér!
b) Adjunk konkrét példát fentiekre!

38. a) T egy E euklideszi tér lineáris operátora. Legyen $T^{*} = T^{-1}$. Bizonyitsuk be, hogy ekkor a tárgytér tetszőleges két vektorának skalárszorzata megegyezik képeik skalárszorzatával – a leképezés skalárszorzattartó –.
b) Adjunk példát a fenti tulajdonságu operátorra.

39. Bizonyitsuk be, hogy az R^n-ből R^n-be képező önadjungált operátorok halmaza vektortér a valós számtest felett!

40. A térvektorok lineáris terében legyen az A homogén lineáris transzformáció a $\underline{k}$ vektor körüli 45^{o}-os forgatás.
Határozzuk meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

41. Az akárhányszor differenciálható függvények lineáris terében a T lineáris operátor legyen:

$$T f = f'.$$

Adjuk meg T sajátértékeit és sajátvektorait (sajátfüggvényeit).

42. Egy T homogén lineáris transzformáció egy négydimenziós V vektortér

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisának a

$T \underline{e}_1 = \underline{e}_1; \quad T \underline{e}_2 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2; \quad T \underline{e}_3 = 2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3;$

$T \underline{e}_4 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 + \underline{e}_4$ vektorokat felelteti meg.

Határozzuk meg T sajátértékeit és sajátvektorait az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ bázisban!

43. Egy T lineáris operátor mátrixa egy B bázisban $\underline{\underline{T}}$,

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg T sajátértékeit és sajátvektorait a B bázisban!

44. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{45.}$ Határozzuk meg az A^2 mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

46. Legyen a T lineáris operátor invertálható. Mutassuk meg, hogy a nulla nem lehet sajátértéke.

47. Adjuk meg az

$$(\underline{\underline{A}}^2)^{-1} \text{ mátrix}$$

sajátértékeit és sajátvektorait, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

48. Határozzuk meg a következő mátrixok spektrálfelbontását:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

49. Határozzuk meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 77 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, majd annak felhasználásával adjuk meg az

$\underline{\underline{A}}^{100}$ mátrixot!

50. Legyenek az $\underline{\underline{A}}$ n-edrendű kvadratikus mátrix sajátértékei:
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $(\lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n)$

a) Adjuk meg det $\underline{\underline{A}}^2$ értékét a sajátértékekkel.

b) det $(\underline{\underline{A}}^{-1})^3$ értékét adjuk meg a sajátértékekkel.

51. Határozzuk meg az

$$A = a \circ b$$

lineáris operátor sajátértékeit és sajátvektorait. (L. 28. feladat!)

52. Legyen $A = a \circ b$. (L. 28. feladat!)
Határozzuk meg
a) az A operátor skalárinvariánsait.
b) az $A\,A^*$ operátor skalárinvariánsait.

53. Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, fővektorait, majd irjuk fel Jordan alakját!

54.! Legyen a T lineáris operátor unitér.
Bizonyitsuk be, hogy sajátértékei egységabszolutértéküek!

55.! Igazoljuk, hogy ha az A lineáris operátorra

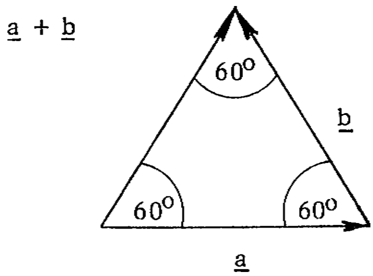
$$A^* = -A,$$

akkor sajátértékei tiszta imaginárius számok!

MEGOLDÁSOK

I. A TÉRVEKTOROK

$\boxed{1.}$ Igen. Például:



Itt $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a}| = |\underline{b}|$.

$\boxed{2.}$ Tudjuk, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \perp \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ teljesülésének szükséges és elégséges feltétele is, hogy $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = 0$ legyen. A disztributivitás alapján a szorzatot átalakitva

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 0$$

adódik. Mivel

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = |\underline{v}_1|^2$$

és

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = |\underline{v}_2|^2$$

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \perp \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ fennállásának szükséges és elégséges feltétele is, hogy $|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2|$ legyen. Ezt kellett bizonyitanunk.

(6.) Irjuk fel az átlóknak a metszéspontjuk és a csucsok közti szakaszait, tetszőlegesen irányitva, az oldalvektorok segitségével, majd használ-azt a tételt, hogy ha $c\underline{a} = d\underline{b}$ és $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $c = d = 0$.

8. a) nem igaz: ha $\underline{c} \perp \underline{a} - \underline{b}$, akkor $\underline{a}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{c}$, tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ esetén.
b) nem igaz: ha $\underline{c} \parallel \underline{a} - \underline{b}$, akkor $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{c}$, tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ esetén.

9. $\underline{a} \perp \underline{b}$ és $|\underline{a}| = |\underline{b}|$.

10. Használjuk fel, hogy minden vektor előállitható három nem egysiku vektor lineáris kombinációjaként.

11. a) 1. Ha $\underline{a} \upuparrows \underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges
2. Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, $\underline{c} \perp \underline{b}$ és $\underline{c} \perp \underline{a}$

b) 1. Ha $\underline{a} \updownarrows \underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges
2. Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ és $\underline{c} \parallel \underline{a}$, $\underline{b}$ sikjával.

12. $\boxed{\text{b)}}$ Nem, mert legyen például $\underline{a}$ tetszőleges $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} = 2\underline{a}$, $\underline{c} = 3\underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$ teljesül, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ azonban nem áll fenn.

15. $(\underline{a}, \underline{b})_{\sphericalangle} = \dfrac{\pi}{3}$.

16. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

17. a) $\underline{a} = \underline{0}$ v. $\underline{b} = \underline{0}$

b) $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ $\quad \cos^2\varphi = 1$

$\varphi = 0$, v. $\varphi = \pi$

18. 1. $\underline{a} = \underline{b}$ v. $\underline{a} = -\underline{b}$, $\underline{c}$ tetsz. irányu
2. $\underline{c} \perp \underline{a}$ és $\underline{c} \perp \underline{b}$ $\quad \underline{a}$, $\underline{b}$ tetsz. egységvektorok.

19. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ páronként merőlegesek, akkor van egyenlőség.

20. Használjuk a skaláris szorzat definicióját, és kiszámításának módját derékszögü koordináta-rendszerben.

22. $z = 14$

23. a) $\frac{8}{9}\underline{i} + \frac{8}{9}\underline{j} + \frac{4}{9}\underline{k}$

b) $\left(\frac{8}{9}\underline{i} + \frac{8}{9}\underline{j} + \frac{4}{9}\underline{k}\right) + \left(\frac{10}{9}\underline{i} - \frac{17}{9}\underline{j} + \frac{14}{9}\underline{k}\right)$

A felbontás egyértelmü.

24. $\underline{b} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}$

25. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} \neq 0$, tehát $\underline{v}$ előállitható egyértelmüen,

$\underline{v} = \frac{2}{3}\underline{a} - \frac{2}{3}\underline{b} + \frac{1}{3}\underline{c}$

26. 10,3

27. $x = 5$

28. Igen

29. a) $2x - z + 3 = 0$

b) $1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 4\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = d$,

a sik egyenletének Hesse-féle normál alakjából.

30. a) $x = 1 + 5t$, $y = 2 - 3t$, $z = -t$
b) $d = 3,72$

31. A két egyenes nem kitérő, irjuk fel sikjuk egyenletét:

$$7x - y - z - 10 = 0$$

$$d = \frac{20}{\sqrt{51}}$$

32. $2x + 2y + z - 5 = 0$

33. $c = 7$

34. $x = 3 + 7t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 6t$

35. $t = -1{,}5 \quad M(-2, -0{,}5, 6)$

36. Egy közös pont van: $P(1, -1, 0)$

37. a) Mivel azon pontok mértani helyének egyenletét keressük, amelyek mindkét sikon rajta vannak, a metszésvonal pontjainak koordinátái kielégitik mindkét sik egyenletét. Igy, például $z = t$ paraméter választással oldjuk meg az egyenletrendszert és az

$$x = -\frac{5}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{13}{3}t - \frac{11}{3}$$

$$z = t$$

metszésvonal egyenletrendszert kapjuk.

b) Eljuthatunk az egyenletrendszerhez ugy is, hogy meghatározzuk annak $\underline{v}$ irányvektorát $\underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ módon (mivel $\underline{v} \parallel$ mindkét sikkal, $\perp$ a sikok normálisaira) és meghatározzuk a metszésvonal egy pontjának koordinátáit a két sik egyenletének egy közös megoldását megkeresve.

38. $x = \frac{t}{9} + 1; \quad y = \frac{5}{9}t - 2; \quad z = t$

egyenletrendszerű egyenes a mértani hely.

39. a) $P(2, 5, -1)$

b) pl.: $x = 4-u, \quad y = 9-2u, \quad z = 9-6u$

40. a) $t = \frac{5}{4}$

b) $3(x - 1) + y + 1 - 4(z - 1) = 0$

$3x + y - 4z + 2 = 0$

41. $\cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{485}} \quad \varphi \approx 43^{\circ}$

42. $\sin \varphi = \frac{3}{7}; \quad \varphi \approx 25^{\circ}$

Keressük a szöget, mint az egyenes irányvektora és a sik normálvektora által bezárt szög pótszögét.

43. A két egyenes nem kitérő, a feladat megoldható,

$c = -\frac{75}{7}$

44. $x = \frac{7}{4} + u, \quad y = \frac{5}{2} + 2u, \quad z = \frac{7}{4} + u$

45. a) $3(x - 3) - 2(y + 2) + 5(z - 5) = 0$
b) $P'(6, -4, 10)$

46. A szögfelező sikok illeszkednek a két sik metszésvonalára. Egyikük normálisa

$$\frac{\underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} + \frac{\underline{n}_2}{|\underline{n}_2|}, \quad \text{másikuké} \quad \frac{\underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} - \frac{\underline{n}_2}{|\underline{n}_2|}$$

($\underline{n}_1$, $\underline{n}_2$ az eredeti síkok normálisai).

a kívánt módon csak a $3x - 3y + 4z = 3$ egyenletű szögfelező sík esetében választható meg, ekkor $c = -3$

4 . Két megoldás van:

1. $y + 3z + 14 = 0$
2. $2x - 3y + z - 24 = 0$

1 . $T_\Delta = 3\sqrt{29}$. D illeszkedik AC-re. Tegyük fel, hogy DM felezi a területet és M rajta van BC-n. DM egyenlete:

$$x = -2 + at$$
$$y = bt$$
$$z = 2 + ct$$

ADM_Δ területe: $T' = \sqrt{5\, b^2 t^2 + (2c - a)^2 t^2} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$. DM benne van a $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ egyenletű síkban, ezért a, b, c kielégíti a

$$2a - 3b - 4c = 0$$

egyenletet is. Ebből $2c - a = -\frac{3b}{2}$, amit T'-be helyettesítve $y_M = 3$ adódik. A BC egyenes egyenletéből $M(-\frac{3}{2}, 3, 0)$ és a keresett egyenes egyenlete:

$$x = -2 + \frac{1}{2}t, \quad y = 3t, \quad z = 2 - 2t$$

Az AB szakaszon nincs olyan M' pont, hogy DM' felezné a háromszög területét.

II. KOMPLEX SZÁMOK

1. a) $-2j$

   b) $2 + j$

   c) $-\frac{2}{5}$ (A nevezők konjugáltjaival bővitve a nevezők valósak lesznek.)

   d) $\frac{1}{2} j$

   e) -3

   f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{2} j$; $-1 + j$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} - 2}{2} j$

2. a) $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + j \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

   b) $\frac{1}{2^{10}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   c) $(\sqrt{2})^{n+2} \cdot \cos n\frac{\pi}{4}$

   d) $\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$; $\sqrt{2}\, e^{j\frac{5\pi}{4}}$

   e) $e^{j\frac{\pi}{2}}$; $e^{j\frac{7\pi}{6}}$; $e^{j\frac{11\pi}{6}}$

   f) $e^{j\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $k = 0, 1, 2, 3$

   g) $\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{k\pi}{3}}$ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

   h) $2\sqrt{2}\, e^{j(k+1)\pi}$ $k = 0, 1,$ vagyis $2\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$

   i) $\sqrt[4]{2}\, e^{j\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)}$ $k = 0, 1, 2, 3$

j) $e^{j\frac{(2k+5)\pi}{4}}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

3. a) $|z| = \frac{1}{3}$ $\quad \arg z = -\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{b)}}$ $|z| = 2$ $\quad \arg z = \frac{\pi}{4}$, vagy $z = 0$

Ugyanis $\quad \arg 2z^2 = 2\arg 2z = 2\arg z,$

$\arg 3z = \arg z$

felhasználásával $\arg z = \frac{\pi}{4}$, másrészt a $|z|^3 - 4|z| = 0$

egyenletből $|z| = 2$ vagy $|z| = 0$ lehet.

4. $z_k = (1 - j) \cdot e^{jk\frac{\pi}{4}}$ $\quad k = 1, 2, 3$

$z_k = \sqrt{2}\; e^{j(k-1)\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{5.}$ Keressük a megoldást $z = re^{j\varphi}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ alakban.

$$\sqrt[7]{r} \cdot e^{j\frac{\varphi + 2k\pi}{7}} = \sqrt[3]{r} \cdot e^{j\frac{\varphi + 2\ell\pi}{3}} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots 6 \\ \ell = 0, 1, 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\sqrt[7]{r} = \sqrt[3]{r}$. Ebből r lehetséges értékei $r = 0$, $r = 1$.

$\frac{\varphi + 2k\pi}{7} = \frac{\varphi + 2\ell\pi}{3}$. Ebből kapjuk φ lehetséges értékeit:

$3\varphi + 6k\pi = 7\varphi + 14\ell\pi \implies$

$$\varphi = \frac{6k\pi - 14\ell\pi}{4} = \frac{3k\pi - 7\ell\pi}{2}$$

$$0 \le \frac{3k - 7\ell}{2}\pi < 2\pi$$

$$0 \le 3k - 7\ell < 4$$

Ebből l, k egészekre kapjuk:

ha $\ell = 0$, akkor $k = 0, 1$ lehet
ha $\ell = 1$, akkor $k = 3$ lehet
ha $\ell = 2$, akkor $k = 5$ lehet.

Tehát φ lehetséges értékei: $0,\ \frac{3\pi}{2},\ \pi,\ \frac{\pi}{2}$.

A megoldások: $z_1 = 1,\ z_2 = -j,\ z_3 = -1,\ z_4 = j$ és $z_5 = 0$.

6. $(1 + j)$-t $\frac{2\pi}{3}$-mal, majd $\frac{4\pi}{3}$-mal elforgatva kapjuk a további csucsokat.

$$z_2 = \sqrt{2}\ e^{j\frac{\pi}{4}}\ e^{j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}\ e^{j\frac{11\pi}{12}}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\ e^{j\frac{\pi}{4}}\ e^{j\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}\ e^{j\frac{19\pi}{12}}$$

7. $$z_k = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot e^{j(k-1)\frac{\pi}{3}} \qquad k = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$z_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}j; \quad z_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}j; \quad z_4 = 1 + 3j$$

$$z_5 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}j; \quad z_6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}j$$

8. $$z_1' = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)j \qquad z_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}j$$

$$z_3' = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)j$$

9. $\arc z = \varphi$ jelöléssel

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{\sin\varphi}{2(1 - \cos\varphi)}$$

11. a) z_1 és z_2 valós

b) $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$ és $\mathrm{Im}\, z_1 = -\mathrm{Im}\, z_2$ azaz $z_1 = \bar{z}_2$

13. $\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. a) Irjuk fel z-t algebrai alakban

$z = \frac{3}{2} - 2j$

b) $z = \frac{3}{4} + j$

15. a) $x_1 = 3 - 11j$; $x_2 = -3 - 9j$ $\quad x_3 = 1 - 7j$

b) $x_1 = t$ $\quad x_2 = 2jt - j$ $\quad x_3 = -t$

(t tetszőleges komplex szám)

16. a) $z_1 = z_2 = 0$, $\quad z_k = 2e^{j\frac{2k+1}{4}\pi}$ $\quad k = 3, 4, 5, 6$

b) $z_1 = 1 + 3j$, $\quad z_2 = 3 + 3j$

c) $z_1 = 2 + j$, $\quad z_2 = 1 - j$

d) $z_1 = 0$, $\quad z_k = \sqrt[8]{2}\, e^{j\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)}$ $\quad k = 2, 3, 4, 5$

e) $z_1 = z_2 = 0$ $\quad z_k = e^{j\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ $\quad k = 3, 4, 5$

17. a) $x = \frac{2}{5}$ $\quad y = -\frac{1}{5}$

b) $z_1 = 0$, $\quad z_k = re^{j\frac{k\pi}{2}}$

($r > 0$ tetszőleges, $\quad k = 2, 3, 4, 5$)

c) Legyen $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ és $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$.

Ekkor $z_1 \cdot \bar{z}_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ezt az egyenletbe helyettesitve az $r_1 \cdot r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = r_1 \cdot r_2$ egyenletet kapjuk, amelyből a megoldások: z_1 és z_2 ha $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ (k egész), r_1, r_2 tetszőleges pozitiv valós számok.

18. Alkalmazzuk az

$|a + b| \leq |a| + |b|$ egyenlőtlenséget!

19. $f(n + 4) = - f(n)$

20. b) $c \neq -1$ esetén van megoldás

$$x = \mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$(\varphi = \mathrm{arc}\ c)$

22. a) $\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

Használjuk fel, hogy

$$\cos 4x = \mathrm{Re}\,(\cos x + j \sin x)^4$$

b) $\cos 7x = \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x\ \mathrm{xin}^6 x$

c) $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

Használjuk fel, hogy

$$\sin 3x = \mathrm{Im}\,(\cos x + j \sin x)^3$$

d) $\sin 6x = 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x$

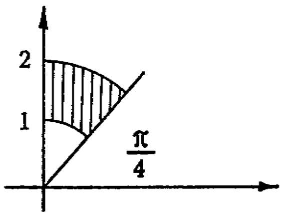
23. a) $\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$

b) $\sin \dfrac{n+1}{2} x \dfrac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

$z_4 = 2j, \quad z_5 = 1 - 3j$

$P(z) = (z+1)(z^2+4)\left[(z-1)^2 + 9\right]$

25. a) (0, 1) középpontu 2 sugaru kör
b) $x = 1$ egyenletü egyenes
c) $y > 1$ félsik
d)



Az ábrán vonalkázott tartomány

$\boxed{\text{e)}}$ $0 \le \text{arc}(z-j) - \text{arc}(z+j) < \frac{\pi}{4} \implies$

$0 \le \dfrac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1$ (a szögek tangenseit tekintve)

ha $x \ge 0$, akkor $x^2+y^2-1 < 0$ és $(x+1)^2+y^2 < 2$;
ha $x < 0$, akkor $x^2+y^2-1 > 0$ és $(x+1)^2+y^2 > 2$.

III. MÁTRIX MŰVELETEK

1\. a) $$\underline{\underline{C}}_a = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\underline{\underline{C}}_b = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $$\underline{\underline{C}}_c = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

d) $$\underline{\underline{C}}_d = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -8 & -2 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$$

2\. $$\begin{pmatrix} 15 & -10 & 11 \\ 6 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

3\. a) $$\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 29 & 13 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 26 & 1 & -25 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) 2 x 3
b) 3 x 3
c) 2 x 2
d) 4 x 3
e) 3 x 2
f) 3 x 3
g) 4 x 3

4/a. a) $\underline{\underline{a}}_j$ (az $\underline{\underline{A}}$ j. oszlopa)
b) $\underline{\underline{a}}_i'$ (az $\underline{\underline{A}}$ i. sora)
c) a_{ij}
d) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$
e) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$
f) $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$

Fentiek érvényesek nem kvadratikus esetre is.

5. a) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

6. Ha $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ kvadratikus mátrixok felcserélhetők – vagyis $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ – akkor igaz az egyenlőség.

$\boxed{7.}$ a) Elvégezve mindkét szorzást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

felcserélhetők, ha

$$b\,C = Bc \quad \text{és} \quad B(a - d) = b(A - D)$$

pl. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 21 & 12 \end{pmatrix}$

7. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{8.}$ Pl. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{A}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $\boxed{a)}$ Minden $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix jó, ha

$$a + 2c = 0 \quad \text{és}$$
$$b + 2d = 0,$$

vagyis

$$a = -2c,$$
$$b = -2d \qquad c, d \ \text{tetszőleges}.$$

b) nincs

10. Teljes indukcióval igazolható.

12. $$\underline{\underline{A}} = \frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}'}{2} + \frac{\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}'}{2}$$

szimmetrikus antiszimmetrikus

14. $$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} (\underline{a}_1 \ \ldots\ldots \ \underline{a}_n) = \underline{\underline{0}}$$

A főátlót nézve: $\underline{a}'_i \cdot \underline{a}_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow$

$\underline{a}_i = \underline{0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$

16. $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ főátlójában álló elemek összege nulla, tehát nem lehet egységmátrix.

17. A megfelelő egységmátrixon kell a kívánt transzformációt végrehajtani és oszloptranszformáció esetén jobbról, sortranszformáció esetén balról szorozni vele $\underline{\underline{A}}$-t.

18. Használjuk 17. eredményét.

19. a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

IV. VEKTORTEREK

$\boxed{1.}$ Például: A pozitiv elemü számsorozatok a valós számtest felett, ha $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ és $c.\ (a_n) = (c\ .\ a_n)$ nem alkotnak vektorteret, mert a számmal szorzás kivezet a halmazból.

$(c\ .\ a_n < 0$ ha $c < 0.)$

2. a) Igen. Végig kell nézni az axiómákat.

$\boxed{b)}$ Nem, ha $c \neq 1$, akkor $\begin{pmatrix} c\ .\ a & c\ .\ b \\ -b & a \end{pmatrix}$ nem eleme a halmaznak.

c) Igen.

3. a) Igen
b) Igen
c) Igen
d) Nem, mert pl. divergens sorozatok összege lehet konvergens.

4. $\boxed{b)}$ lásd 4.c, 5.a,c

c) Igen

5. Elég megnézni, hogy zárt-e a halmaz a két müveletre

a) Igen
b) Nem, mert $P_n + Q_n$ fokszáma lehet kisebb, mint n.
c) Igen
d) Csak akkor, ha $g(x) \equiv 0$
e) Nem, pl. az összeadás kivezet, mivel irracionális számhoz irracionális számot hozzáadva kaphatunk racionális számot.

6. $\boxed{b)}$ Nem, mert egységnyi abszolutértékü komplex számok számsorosa már lehet nem egységnyi abszolutértékü akár a valós, akár a komplex számtest felett.

8. a) Igen

$\boxed{b)}$ Nem. Pl. legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ nem skalárszorosai egymásnak. Legyen $V_1 = \{c\ \underline{v}_1\}$ $V_2 = \{c \cdot \underline{v}_2\}$ $V_1 \cup V_2$ nem tartalmazza pl. $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$-t.

9. Gondolkodhatunk V egy bázisának felhasználásával.

10. a) Nem igaz
b) Nem igaz
c) Igaz
d) Nem igaz

11. $t \neq \frac{3}{2}$.

12. $c \cdot d = -2$

13. a) nincs benne
b) benne van.

14. a), b), c) függetlenek, d) összefüggő.

15. Nem, mert lineárisan összefüggők (ld. 14/d).

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Igen, mert lineárisan függetlenek és a bázis négy elemű.

17. Egy bázist alkotnak például azok a $\underline{\underline{B}}_{ij}$ ($i \leq j$ $j = 1, 2, \dots, n$) mátrixok, amelyekre $b_{ij} = b_{ji} = 1$ és a többi elemük nulla.

$$\dim S = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

18. a) $B : 1,\ x,\ x^2,\ x^3$.
b) igen.

19. $n + 1$

20. $\dim A \cap B = 1$

21. $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 1$

22. $\dim\ V_1 \cap V_2 = 1$
Bázis:
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

23. $n - 1$ dimenziós alteret alkotnak. Ezek az $(x_1, -x_1, x_3, \dots, x_n)$ alaku vektorok.

24. a) $c \neq 1$
b) $c = 2$ választással
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_1$ $\underline{e}_2$ $\underline{e}_3$ $\underline{e}_4$ bázisbeli koordinátái: $\begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

25. $\underline{v} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$

26. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

29. b) Megforditható.

$\boxed{31.}$ a) 2n dimenziós

b) $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n, \; j\,\underline{b}_1 \ldots, j\,\underline{b}_n$

(j az imaginárius egység)

33. Konstruáljuk meg $V_1 \oplus V_2$ egy bázisát V_1 és V_2 egy-egy bázisából.

34. $\text{Rang } \underline{\underline{C}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t = 1 \\ 2 & \text{ha} \quad t = -1{,}5 \\ 3 & \text{egyébként} \end{cases}$

36. $n - 1 \le \text{rang } \underline{\underline{A}}_n \le n$

37. $2 \le \text{rang } \underline{\underline{A}} \le 4$
Megoldható elemi sor ill. oszloptranszformáció segitségével.

38. Legyen rang $\underline{\underline{A}} = k$, rang $\underline{\underline{B}} = \ell$. Ez azt jelenti, hogy

$\underline{\underline{A}} : \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ oszlopai között k darab,
$\underline{\underline{B}} : \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ oszlopai között ℓ darab

lineáris független vektor van.
Ekkor $\underline{a}_1 + \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_n + \underline{b}_n, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ között legfeljebb $k + \ell$ független lehet. Az utóbbi vektorrendszerből a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ vektorokat elhagyva éppen $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ oszlopait kapjuk, igy

$$\text{rang } (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \le k + \ell = \text{rang } \underline{\underline{A}} + \text{rang } \underline{\underline{B}}$$

39. L. 38 megoldását

40. A szorzat sorai ill. oszlopai a megfelelő tényező sorainak ill. oszlopainak lineáris kombinációi.

41. b) rang $\underline{\underline{A}}$ = rang $\underline{\underline{B}} = n$.

43. Nem

44. L. III. fejezet 18. feladat.

45. Az előbbi feladat állitását felhasználva

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{x}}_1 \, \underline{\underline{D}}_1 \, \underline{\underline{y}}_1$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{x}}_2 \, \underline{\underline{D}}_2 \, \underline{\underline{y}}_2$$

$\underline{\underline{x}}_1, \underline{\underline{y}}_1, \underline{\underline{x}}_2, \underline{\underline{y}}_2$ rangja n
$\underline{\underline{D}}_1$ főátlójában r_1 egyes és $n - r_1$ nulla
$\underline{\underline{D}}_2$ főátlójában r_2 egyes és $n - r_2$ nulla van.

$$\underline{\underline{D}}_1 \underbrace{\underline{\underline{y}}_1 \, \underline{\underline{x}}_2}_{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{D}}_2 \quad \text{rangját kell megállapitani.}$$

Ez a mátrix $\underline{\underline{C}}$-ből – melynek rangja n – ugy jön létre, hogy $n - r_1$ sorának és $n - r_2$ oszlopának elemei helyére nullát irunk. Mivel egy sor ill. oszlop elhagyása a rangot legfeljebb eggyel csökkenti, a rang legalább

$$n - (n - r_1) - (n - r_2) = r_1 + r_2 - n.$$

V. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

1. a) nem igaz
   b) nem igaz
   c) nem igaz
   d) igaz.

2. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ c tetszőleges valós

   b) $\underline{x} = c \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c tetszőleges valós

   c) $\underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ c_1, c_2 tetszőleges valós

   d) $\underline{x} = c \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ c tetszőleges valós

3. a) $\underline{x} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,5 \\ 4,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c tetszőleges valós szám

   b) $\underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c_1, c_2, c_3 tetszőleges valós számok.

e) $\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c tetszőleges valós szám.

4. a) Adjuk hozzá az első egyenlethez az összes többit...

$x_k = \dfrac{n\,(n+1)}{2\,(n-1)} - k \qquad k = 1, 2, \dots, n$

b) $x_k = -\dfrac{n}{2} \qquad k = 1, 2, \dots, n$

$\boxed{5.}$ Az egyenletrendszer jobb oldali oszloppal bővített mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 & 2-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ alakra hozható

elemi sor és oszloptranszformációval. Ebből látszik, hogy

α) ha $c \neq 1$, akkor van megoldás, és az egyértelmű;
β) ha $c = 1$ és $d = 2$ akkor végtelen sok megoldás van;
γ) ha $c = 1$ és $d \neq 2$, akkor nincs megoldás.

6. Van megoldás, ha $c = -2$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. $c = 5$ esetén van megoldás

$$\underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2 tetszőleges valós.

8. a) Ha $c = d = 2$, akkor

$$\text{rang } \underline{\underline{A}} = \text{rang } (\underline{\underline{A}}, \underline{b}) = 1,$$

így a homogén egyenletrendszer megoldásvektorai 2 dimenziós vektorteret alkotnak.
Egyébként rang $\underline{\underline{A}}$ = rang $\underline{\underline{A}}, \underline{b} = 2$, tehát mindig van megoldás.

b) Ha $c \neq 1$ és $c \neq -2$, akkor egyértelmű megoldás van.
Ha $c = -2$, akkor nincs megoldás.
Ha $c = 1$, akkor végtelen sok megoldás van.

c) Ha $c = 2 \pm \sqrt{3}$, akkor végtelen sok megoldás van,
ha $c \neq 2 \pm \sqrt{3}$, akkor csak triviális megoldás létezik.

9. Ha $c = 0$, akkor nincs megoldás.
Ha $c = 1$, akkor végtelen sok megoldás van:

$$\underline{x} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha $c \neq 0$ és $c \neq 1$, akkor egy megoldás van:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{c}; \quad x_3 = \frac{3}{c}; \quad x_4 = 1 - \frac{5}{c}.$$

11. Következtessünk $\underline{\underline{A}}$ rangjára.

13. a) $$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $$\underline{\underline{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\underline{\underline{C}}^{-1}$ nem létezik, mert rang $\underline{\underline{C}} < 3$.

14. a) Ha $c \neq 0$, akkor van inverz:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} c+1 & -1 & c+2 \\ c+3 & -3 & 6-c \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Ha $c \neq -2$, akkor van inverz:

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{3c+6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 2c+3 & -c-1 & 1 \\ 3-c & 2c-1 & -5 \end{pmatrix}$$

15. $x \neq 1$ és $x \neq -\frac{1}{2}$

16. $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & & \\ . & & & . \\ . & . & & . \\ . & & & . \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$

17. Ha $c \neq -1 \quad \exists \quad \underline{\underline{A}}^{-1}$, ekkor $\underline{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. Keressünk olyan $\underline{\underline{B}}$ mátrixot, amelyre $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$!

19. $\boxed{\text{b)}}$ nem igaz, pl. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$.

20. $\boxed{\text{b)}}$ nem ld. 19.b) feladatot

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{0}} \not\Rightarrow \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$$

21. a) $d_i \neq 0 \qquad i = 1, \dots, n$

b) $\underline{\underline{D}}^{-1} = \left\langle \frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n} \right\rangle$

25. Használjuk a következő tételt:

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}' \cdot \underline{\underline{A}}'.$$

VI. A DETERMINÁNS

1. a) -11
   b) - 5
   c) 27
   d) 1

2. a) $-2\,(a^3 + b^3)$
   b) ab
   c) $(b - a)(c - a)(c - b)$
   d) $abc - a - c$

3. a) $(2n + 3)\,3^{n-1}$
   b) $x^{n-1}(x + n)$

   (Adjuk hozzá az első sorhoz az összes többit!)

4. a) $x_1 = a$, $x_2 = b$
   b) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$
   c) $x = 5$

5. $\det \underline{\underline{A}} = 1$

   (Lássuk be, hogy $\det \underline{\underline{A}}_n = \det \underline{\underline{A}}_{n-1}$)

7. Adjuk hozzá az első sorhoz a másodikat és a másodikhoz a harmadikat.

8. Használjuk fel, hogy

$$\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}'$$

9. Használjuk fel, hogy

$$\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}'.$$

VII. EUKLIDESZI TEREK

1\. 1. $(\underline{\underline{x}} \mid \underline{\underline{y}}) = (\underline{\underline{y}} \mid \underline{\underline{x}})$, mert a mátrix szimmetrikus

2\. $(c\,\underline{\underline{x}} \mid \underline{\underline{y}}) = c(\underline{\underline{x}} \mid \underline{\underline{y}})$

3\. $(\underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{x}}_2 \mid \underline{\underline{y}}) = (\underline{\underline{x}}_1 \mid \underline{\underline{y}}) + (\underline{\underline{x}}_2 \mid \underline{\underline{y}})$

a mátrix szorzás tulajdonságaiból következik.

4\. $(\underline{\underline{x}} \mid \underline{\underline{x}}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$$

és csak akkor nulla, ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, vagyis $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$ esetén.
Az axiómák teljesülnek, a hozzárendelés tehát skaláris szorzás.

2\. a) igen,
b) nem, ugyanis

$$\int_0^1 f'(t)^2\,dt = 0 \;\not\Longrightarrow\; f(t) \equiv 0$$

3\. a) igen
b) nem

4\. a) igen
b) nem

5\. Schmidt ortogonalizálási eljárással pl. az

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ bázisból adódik az

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$$ ortogonális bázis.

8. $$\int_0^1 (ax+b)\,dx = \frac{a}{2} + b = 0,$$

$$\int_0^1 (ax+b)^2 dx = \frac{a^2}{3} + ab + b^2 = 1,$$

innen

$$q_1(x) = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3},$$
$$q_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

9. $\boxed{c)}$ Valós térben igaz, komplex térben

$(\underline{x} \mid \underline{y}) + (\underline{y} \mid \underline{x}) = 0$-ból csak $\mathrm{Re}(\underline{x} \mid \underline{y}) = 0$ következik.

$\boxed{13.}$ $$((\underline{x} - c_1\underline{s}_1 + c_2\underline{s}_2 + c_3\underline{s}_3) \mid \underline{s}_i) = 0$$

$i = 1, 2, 3,$

Mivel $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ ortogonális rendszer, ezért

$$c_i = \frac{(x \mid s_i)}{(s_i \mid s_i)} \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$c_1 = \frac{13}{7} \qquad c_2 = \frac{11}{5} \qquad c_3 = \frac{12}{2} = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \underline{s}_i = \begin{pmatrix} -\frac{29}{7} \\ \frac{207}{35} \\ \frac{55}{7} \\ \frac{89}{35} \end{pmatrix} ; \qquad \underline{x} - \sum_{i=1}^{3} c_i \underline{s}_i = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{32}{35} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{16}{35} \end{pmatrix}$$

a két keresett komponens.

14. $c = \dfrac{(\underline{x} \mid \underline{y})}{(\underline{y} \mid \underline{y})}$ (projekció tétel)

15. A projekció tétel alapján:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos k\, x\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin k\, x\, dx$$

$k = 1, \ldots, n.$

16. a) igen
b) igen
c) nem $|\det \underline{\underline{A}}| = 0 \not\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

17. a), b), c) igen
    d) nem

18. a) nem
    b) nem
    c) igen

21. Egy (f_n) sorozatot akkor nevezünk valamilyen normában konvergensnek, ha az $(\|f_n\|)$ sorozat konvergens.

VIII. LINEÁRIS OPERÁTOROK

$\boxed{1.}$ a) $D(f+g) = (f+g)'' = f'' + g'' = Df + Dg$, tehát

$D(f+g) = Df + Dg$

$D(c \cdot f) = (c \cdot f)'' = c \cdot f'' = c \cdot Df$, tehát

$Dcf = cDf$ is fennáll.

b) A magtérbe a $Df = 0$ tulajdonságu függvények tartoznak. Ha $f'' = 0$, akkor $f(x) = ax + b$, ahol a, b tetszőleges valós szám

2. a), b), d) lineáris operátor
c) nem

3. $\boxed{b)}$ Határozzuk meg a bázis vektorok képeit:

$D1 = 0$, $D \cos t = -\cos t - \sin t$,
$D \sin t = \cos t - \sin t$,

igy

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. A tárgytér egy bázisa:

$1, \; x, \; \dots \; x^n$.

A képtér egy bázisa:

$1, \; x+1, \; \dots \; (x+1)^n$.

Ebben a bázispárban

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

5. b) A tárgytér egy bázisa:

$$1, \quad x, \quad \dots \quad x^n$$

a képtér egy bázisa:

$$1, \quad x, \quad \dots \quad x^k$$

Ebben a bázispárban

$$\underline{\underline{T}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & k & & & n \end{array} \end{array}$$

9. a) A képtér dimenziója $\underline{\underline{A}}$ rangja, 2.
Mivel a tárgytér 5 dimenziós, a magtér dimenziója 3.

b) A magtér bázisa az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer egy lineárisan független megoldás rendszere:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Ha $c \neq 4$ $\dim \mathrm{Im}\, A = 3$, $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$
Ha $c = 4$ $\dim \mathrm{Im}\, A = 2$, $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$

11. $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 3 \\ \frac{3}{2} - 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

13. a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. $(\underline{e}_1 \mid \underline{a}) = 2\,(\underline{e}_1 \mid \underline{e}_1) = 4$

$(\underline{e}_2 \mid \underline{a}) = -\,(\underline{e}_2 \mid \underline{e}_2) = -9$

$(\underline{e}_3 \mid \underline{a}) = -\,(\underline{e}_3 \mid \underline{e}_3) = -1$

$T\,\underline{e}_1 = 8\,\underline{e}_1 - 4\,\underline{e}_2 - 4\,\underline{e}_3$

$T\,\underline{e}_2 = -18\,\underline{e}_1 + 9\,\underline{e}_2 + 9\,\underline{e}_3$

$T\,\underline{e}_3 = -2\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 8 & -18 & -2 \\ -4 & 9 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

16. b) U bázisa: $1,\ t,\ \dots,\ t^n$.

Im T bázisa: $t,\ t^2,\ \dots,\ t^{n+1}$

Ebben a bázispárban T mátrixa:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

17. b) Két egymás utáni transzformáció szorzataként tekintve

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \ \cos\beta & -\sin\alpha \ \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha \ \sin\beta & \sin\alpha \ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

18. $T^{-1} = E - T$

19.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20. a)

$$\underline{\underline{T}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{b)}}$ $\underline{\underline{T}}_c = \underline{\underline{C}}^{-1} \ \underline{\underline{T}}_B \ \underline{\underline{C}}$

$$\underline{\underline{T}}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vagy más módon, felirva a

$(T(\underline{e}_1 + \underline{e}_2), \quad T(\underline{e}_2 + \underline{e}_3), \quad T\underline{e}_3, \quad T\underline{e}_4)$

mátrixot és ezután bázistranszformációt végezve.

$$\underline{\underline{T}}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. a) T^{-1} nem létezik, mert pl. $\underline{\underline{T}}_e$ szinguláris

b) $\underline{\underline{T}}_{e'} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 8 & 3 & 9 \\ \frac{11}{3} & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{24.}$ V bázisa $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$

$U_1 \subset V$ bazis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{r_1}$ $r_1 \leq n$

$U_2 \subset V$ $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{r_2}$ $r_2 \leq n$

$U_1 \xrightarrow{T} U_3 \subseteq U_2$

U_3 bázisa $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r$. A képtér dimenziója $\leq$ a tárgytér dimenziójánál, tehát $r \leq r_1$ és $U_3 \leq U_2$ miatt

$r \leq r_2 \Longrightarrow r \leq \min(r_1, r_2)$.

Tekintsük most az $\underline{e}_{r_1+1}, \ldots, \underline{e}_n$ vektorokat, amelyek kiegészitik U_1 bázisát V bázisává és ezek képeit amelyekre $r_2 - r \leq$ $\leq n - r$ és ez a bizonyitandó egyenlőtlenség bal oldala.

26. Ha U_1 mátrixa B_1-ben $\underline{\underline{U}}_1$ és U_2-é B_2-ben $\underline{\underline{U}}_2$, akkor

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_1 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{U}}_2 \end{pmatrix}$$

27. b) $T^* = I$

28. b) $(\underline{a} \circ \underline{b})^* = \underline{b} \circ \underline{a}$

32. $T^* = -T$

34. pl. $\underline{\underline{T}}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a B_1 : $\underline{i}$, [illegible] + [illegible] $\underline{k}$ bázisban.

A B_2: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban $\underline{\underline{T}}_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{T}}_{B_2}$ nem szimmetrikus, bár B_2 ortonormált, tehát $\underline{\underline{T}}_{B_1}$ szimmetrikus voltából nem következik, hogy T szimmetrikus.

40. $\lambda = 1$, $\underline{s} = c\underline{k}$ c tetszőleges valós szám.
A karakterisztikus egyenlet további két gyöke komplex, így az R feletti vektortérnek nem sajátértéke.

41. Mivel a lineáris tér nem véges dimenziós, nincs karakterisztikus egyenlet. $\underline{s} = c \cdot e^{\lambda x}$ $(c \in R)$ a sajátvektorok. A λ sajátérték tetszőleges valós szám.

42. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$; $\lambda_4 = 2$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_4 = c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

43. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

44. a) $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 1$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{45.}$ Ha $\underline{\underline{A}}$ sajátértéke λ_1, λ_2, akkor $\underline{\underline{A}}^2$-é λ_1^2, λ_2^2, sajátvektoraik azonosak. $\underline{\underline{A}}^2$ sajátértékei: 1, 25 sajátvektorai

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

47. $\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \lambda_2 = \frac{1}{9}$

$$\underline{s}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{s}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

48.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

49.

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -77 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{77}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

50. a) $\det \underline{\underline{A}}^2 = \lambda_1^2 \dots \lambda_n^2$

b) $\det (\underline{\underline{A}}^{-1})^3 = (\lambda_1^3 \dots \lambda_n^3)^{-1}$

51. $(\underline{a} \circ \underline{b})\,\underline{s} = \lambda\,\underline{s}$; $\quad \underline{a}\,(\underline{b} \mid \underline{s}) = \lambda\,\underline{s}$

1. $\underline{s} = c \cdot \underline{a}$, $\lambda = (\underline{b} \mid \underline{a})$
2. $(\underline{b} \mid \underline{s}) = 0$ $\lambda = 0$, tehát az összes $\underline{b}$-re merőleges vektorok is sajátvektorok.

53. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ $\qquad \underline{s} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{f}_1 = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{f}_2 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

A Jordan alak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{54}$ T unitér, ha $T^* = T^{-1}$

Ekkor ha $\underline{s}$ sajátvektor és λ sajátérték

$$(T\,\underline{s} \mid T\,\underline{s}) = (\underline{s} \mid T^* T\,\underline{s}) = (\underline{s} \mid \underline{s}) \quad \text{és}$$

$$(T\,\underline{s} \mid T\,\underline{s}) = (\lambda \underline{s} \mid \lambda \underline{s}) = \lambda \cdot \bar{\lambda}\ (\underline{s} \mid \underline{s}) \Longrightarrow |\lambda| = 1.$$

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **MATEMATIKAI PÉLDATÁR V. Algebra**

A jegyzet szerzője: **Csató Tamásné**

A jegyzet azonosítója: **051400**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)