Valószínűségszámítás 2. ZH, 2007. november 30.

1. Válasszunk egy véletlen pontot egyenletes eloszlással egy téglalapban, aminek az oldalai a és b. (Legyen $a \geq b$.) Jelölje X a véletlen pont távolságát a téglalap hozzá legközelebbi oldalától. Mi X sűrűségfüggvénye?

   Bónusz feladat piros pontért: Válasszunk egy véletlen pontot egyenletes eloszlással egy adott sokszögben, és legyen X a pont távolsága a sokszög hozzá legközelebbi oldalától. Mit kell tudni a sokszögnek ahhoz, hogy X sűrűségfüggvénye olyan alakú legyen, hogy

   $$f(x) = \begin{cases} -m(x - x_0), & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

   ahol x_0 és m pozitív paraméterek?

2. Radioaktív részecske 2π ms periódusidejű egyenletes körmozgást végez az egységkörön. A $t = 0$ időpontban a részecske az $x-y$ sík $(1, 0)$ koordinátájú pontjából indul, pozitív irányba (vagyis felfelé). A részecske élettartama exponenciális eloszlású, $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ paraméterrel (ms-ban mérve). Jelölje ϕ a bomlás (véletlentől függő) helyvektorának irányszögét (vagyis az x tengely pozitív szárával bezárt szögét), úgy értve, hogy $0 \leq \phi < 2\pi$. Mi ϕ eloszlásfüggvénye és várható értéke?

   Bónusz feladat piros pontért: Milyen lesz ϕ eloszlása abban a határesetben, amikor $\lambda \to 0$ (vagyis a bomlás nagyon lassú a keringéshez képest)?

3. Feldobunk egy szabályos pénzérmét. Ha az eredmény Fej, akkor az (X, Y) véletlen pontot egyenletesen választjuk az ABC háromszögben, ha pedig Írás, akkor a DEF háromszögben, ahol $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$, $D = (-1, 2)$, $E = (1, 2)$ és $F = (0, 5)$. Határozzuk meg X és Y peremsűrűségfüggvényeit, valamint a kovarianciájukat.