

Elméleti kérdések

1. Mondja ki és bizonyítsa be az $n!$ közelítésére szolgáló Stirling formulát (a konstans szorzó azonosítása nélkül). (7 pont)
2. (a) Definiálja tetszőleges számú esemény páronkénti függetlenségét! (1 pont)
(b) Definiálja tetszőleges számú esemény teljes függetlenségét! Következik-e ez a páronkénti függetlenségből? Ha igen, bizonyítsa be! Ha nem, adjon ellenpéldát! (3 pont)
(c) Definiálja valószínűségi változók páronkénti, illetve teljes függetlenségét! (2 pont)
3. (a) Definiálja egy valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! (1 pont)
(b) Adja meg és bizonyítsa be az eloszlásfüggvényeket karakterizáló tulajdonságokat! (3 pont)
(c) Legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow (0; 1)$ folytonos, szigorúan monoton, és rendelkezzen az eloszlásfüggvényeket karakterizáló tulajdonságokkal. Bizonyítsa be, hogy ekkor valóban létezik olyan valószínűségi változó, aminek F az eloszlásfüggvénye. (2 pont)
(d) **elszántaknak piros pontért:** Bizonyítsa be teljes általánosságban, hogy az eloszlásfüggvény ismert tulajdonságai valóban elégségesek is - vagyis ha F rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor valóban létezik olyan valószínűségi változó, aminek F az eloszlásfüggvénye.
4. Mondja ki és bizonyítsa be az exponenciális eloszlás geometriai approximációjára vonatkozó tételt! (6 pont)

FELADATOK A TÚLOLDALON!

Feladatok

5. Egy n tagú férfitársaság vacsorázni ment egy étterembe. Kalapjaikat a ruhatárban hagyták. Vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen vitték el a ruhatárból. Mi a valószínűsége annak, hogy a társaságnak legalább egy tagja a saját kalapját vitte haza? Számoljuk ki e valószínűség határértékét az $n \rightarrow \infty$ limeszben. (7 pont)
6. Mamutföldön a lottót nagyban játsszák: 900 szám közül húznak ki 50-et, viszont minden szelvényen 100 számra lehet (és kell) tippelni. Mennyi egy mamutföldi lottószelvényen a találatok számának várható értéke és szórása? (A feladat eredményeként egy *számot* várunk, semmiképpen sem szummát tartalmazó képletet.) (6 pont)
7. Z bolygót a zsupákok lakják. A zsupákok alacsony termetűek: a férfi zsupákok testmagassága 50cm várható értékű és 8cm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a nőké szintén normális, de várható értéke 45cm , szórása pedig 6cm . A zsupákok párválasztásában a testmagasság nem játszik szerepet.
A zsupák házaspárok hány százalékában magasabb a nő, mint a férfi? (6 pont)

Félévközi Házi Feladat

8. Lássuk be, hogy ha egy folytonos eloszlásfüggvényű nemnegatív valószínűségi változó rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, akkor csak exponenciális eloszlású lehet. (6 pont)

ELMÉLETI KÉRDÉSEK A TÚLOLDALON!