Valószínűségszámítás vizsga, 2008. január 7.

Elméleti kérdések

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Irja fel a $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ valószínűséget, feltéve, hogy ismeri a megadott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül tetszőleges sok együttes bekövetkezéseinek valószínűségeit. Igazolja az összefüggést (amely egyébként szita-formulaként vagy Poincaré formulaként ismert). (6 pont)

2. (a) A és B események. Irja fel a $P(A|B)$ feltételes valószínűség pontos definicióját. (1 pont)

   (b) X és Y egészértékű valószínűségi változók. Definiálja az X valószínűségi változó feltételes eloszlását (pl. feltételes sűrűségfüggvényét) az $Y = n (n \in \mathbb{Z})$ feltétel mellett. (2 pont)

   (c) Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y)$. Definiálja a X valószínűségi változó feltételes eloszlását az $Y = y (y \in \mathbb{R})$ feltétel mellett. (2 pont)

3. Adjon meg elégséges feltételeket arra, hogy a binomiális eloszlás a Poisson eloszláshoz konvergáljon. Fogalmazza meg pontosan az állítást. Bizonyítsa be. (7 pont)

4. Legyen az S_n valószínűségi változó $BINOM(n, p)$ eloszlású. A De Moivre-Laplace centrális határeloszlás tétel bizonyításában ez áll:

$$P(S_n = k) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)^{np+\delta_k} \left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)^{nq-\delta_k}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)\left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)}} \times (1 + o(1))$$

   ahol $\delta_k = k - np$.

   Mit használunk ebben az átalakításban? Indokolja meg az átalakítást! Miért szerepel itt $\tilde{\pi}$? (7 pont)

FELADATOK A TÚLOLDALON!

Feladatok

1. Az $A; B; C$ valós paraméterek milyen értéke mellett lehetnek az alábbi függvények valószínűségi változók sűrűségfüggvényei? Ebben az esetben számoljuk ki a megfelelő eloszlásfüggvényeket is!

   (a) $$f(x) = \begin{cases} A + \sin x & \text{ha } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{(2 pont)}$$

   (b) $$g(x) = \frac{B}{1+x^2}; \quad -\infty < x < \infty. \text{ (2 pont)}$$

   (c) $$h(x) = \frac{C}{\cosh(x)}; \quad -\infty < x < \infty. \text{ (2 pont)}$$

2. A „Gyűrűk Ura Rizikó” nevű társasjátékban egy gyűrű tíz lépést tesz meg az erre szolgáló táblán, éspedig úgy, hogy a játék minden körének végén kockadobással dől el, hogy lép-e a gyűrű vagy sem. A játék akkor ér véget, amikor a gyűrű tizedjére lép - vagyis a tizedik „sikeres” dobásnál. Egy dobás akkor sikeres, ha az eredménye legalább 4. Jelölje X azt a (véletlen) számot, ahány körön át a játék tart. Mennyi X várható értéke és szórása? *Figyelem: numerikus végeredményt, vagy kiszámolható zárt alakot kérünk.* (Ez egy egyszerűsített modell: a játék a valóságban ennél kicsit bonyolultabb.) (6 pont)

3. A Nyakkendőkötészeti Egyetemen a „Szisztematika” szóró tantárgy. Mindenki csak kétszer próbálkozhat: először az első félévben egyenesben, aztán – sikertelenség esetén – a másodikban kereszten. A tapasztalat szerint átlagosan minden harmadik hallgató kénytelen keresztfélévre menni Szisztematikából. A napokban kezdi meg vizsgáit egy 800 fős évfolyam az egyenes félévén, de a keresztfélévhez már most le kell foglalni a termet.

   Hány fős termet foglaljunk a keresztféléves előadáshoz, ha a szabályzatban az áll, hogy mindenkinek helyet kell biztosítani, és mi ennek a szabálynak 99% valószínűséggel meg akarunk felelni? Numerikus végeredményt, vagy kiszámolható zárt alakot kérünk. (7 pont)

Félévközi Házi Feladat

Vegyünk egy n fős társaságot. Jelölje A_{ij} azt az eseményt, hogy az i-edik és j-edik ember egy napon született.

(a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (3 pont)

(b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény? (3 pont)

ELMÉLETI KÉRDÉSEK A TÚLOLDALON!